

## Τα θετικά και τα αρνητικά.

*Μια Καλοκαιρινή βόλτα ακολουθώντας ένα μονοπάτι...*

*Με 13 σκαλοπάτια!*

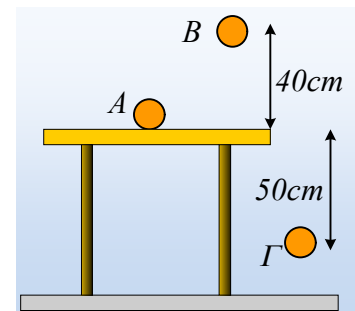
Ας μιλήσουμε σήμερα για θετικά και αρνητικά μεγέθη, χωρίς να ασχοληθούμε με διανυσματικά φυσικά μεγέθη. Εκεί το πρόσημο είναι αυθαίρετο, αφού καθορίζεται από εμάς μια κατεύθυνση ως θετική, στην προσπάθειά μας να μιλήσουμε με αλγεβρικές τιμές και όχι με τα μέτρα των διανυσμάτων.

Τι ακριβώς σημαίνει ότι ο Α έχει +5€, ενώ ο Β έχει -10€, για να ξεκινήσουμε από ένα παράδειγμα δανεισμένου από την οικονομία;

Θα μπορούσαμε με τον τρόπο αυτό να αποδώσουμε την κατάσταση εκείνη, όπου ο Α έχει 5€, ενώ ο Β όχι απλά δεν έχει χρήματα, αλλά χρωστάει και 10€ ή αν προτιμάτε χρειάζεται και 10€ να πάρει, ώστε να μπορέσει να ξεχρεωθεί.

Το πιο απλό παράδειγμα από το χώρο της επιστήμης που θα μπορούσαμε να αναφέρουμε, είναι το να απαντήσουμε σε πόσο ύψος βρίσκεται ένα σώμα, σε σχέση με την επιφάνεια του τραπεζιού του σχήματος.

Θα μπορούσε η απάντηση να ήταν, ότι η Α σφαίρα βρίσκεται σε μηδενικό ύψος, η Β σφαίρα βρίσκεται 40cm πάνω από το τραπέζι και η Γ 50cm κάτω από την επιφάνεια του τραπεζιού. Αλλά θα μπορούσαμε απλά και να πούμε ότι  $h_A=0$ ,  $h_B=+40\text{cm}$  και  $h_\Gamma=-50\text{cm}$ , όπου  $h$  το ύψος από την επιφάνεια του



τραπεζιού. Στην περίπτωση αυτή βέβαια το αρνητικό ύψος της σφαίρας Γ, σημαίνει ότι βρίσκεται χαμηλότερα της επιφάνειας και θα πρέπει να το ανεβάσουμε κατά 50cm ώστε να έρθει στην επιφάνεια.

(Στο παράδειγμα αυτό, σε ένα άλλο επίπεδο διαπραγμάτευσης, θα μπορούσαμε να πάρουμε έναν κατακόρυφο άξονα  $y$ , όπου το σημείο της επιφάνειας θα αντιστοιχούσε στην αρχή  $O$  του άξονα και να μιλούσαμε για τη θέση της σφαίρας  $y_B=+40\text{cm}$  και  $y_\Gamma=-50\text{cm}$ , αλλά ας μείνουμε απλά στο ύψος  $h$ ...).

Έτσι αν μιλάμε για τη δυναμική ενέργεια σώματος  $m=2\text{kg}$ , θεωρώντας ότι η Α σφαίρα στην επιφάνεια του τραπεζιού έχει μηδενική δυναμική ενέργεια, θα είναι:

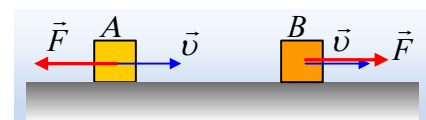
$$U_B=mgh_B=+8J \text{ και } U_\Gamma=mgh_\Gamma=-10J.$$

Όπου η θετική τιμή της στη θέση Β, σημαίνει ότι έχει μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια από όση θα είχε πάνω στο τραπέζι ενώ η αρνητική τιμή στη θέση Γ, σημαίνει ότι έχει μικρότερη δυναμική ενέργεια, από όση θα είχε στην επιφάνεια του τραπεζιού.

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να πούμε ότι  $U_\Gamma=-10J$  σημαίνει ότι απαιτείται να προσφέρουμε στο σώμα ενέργεια 10J για να το μεταφέρουμε στην επιφάνεια του τραπεζιού.

### **Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>:**

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται δυο ίδια σώματα τα οποία δέχονται οριζόντιες δυνάμεις μέτρου  $F=10\text{N}$ . Σε μια στιγμή  $t=0$  έχουν ταχύτητα  $v_0=10\text{m/s}$ . Να βρεθούν για μετατόπιση  $\Delta x=2\text{m}$ :



- i) Το έργο κάθε δύναμης.  
 ii) Η τελική κινητική ενέργεια κάθε σώματος.

Δίνεται  $m=2\text{kg}$ .

### Απάντηση:

- i) Το βάρος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, δεν παράγουν έργο. Έτσι περιοριζόμενοι στις οριζόντιες δυνάμεις έχουμε:

$$\text{Σώμα A: } W_F = F \cdot \Delta x \cdot \cos 180^\circ = -F \cdot \Delta x = -20J$$

$$\text{Σώμα B: } W_F = F \cdot \Delta x \cdot \cos 0^\circ = +F \cdot \Delta x = +20J$$

- ii) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για κάθε σώμα στη διάρκεια της παραπάνω κίνησης παίρνουμε:

$$\text{Σώμα A: } K_\tau - K_a = W_F \rightarrow K_\tau = \frac{1}{2} m v_o^2 + W_F = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^2 J - 20J = 80J$$

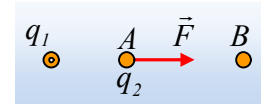
$$\text{Σώμα B: } K_\tau - K_a = W_F \rightarrow K_\tau = \frac{1}{2} m v_o^2 + W_F = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^2 J + 20J = 120J$$

Ποια η φυσική σημασία των παραπάνω τιμών;

Θετικό έργο της ασκούμενης δύναμης σημαίνει ότι το σώμα παίρνει (κερδίζει) ενέργεια, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η κινητική ενέργειά του, ενώ αρνητικό έργο σημαίνει ότι μέσω του έργου αφαιρείται ενέργεια από το σώμα. Θετικό – Αρνητικό έργο σημαίνει ένα «Πάρε-Δώσε»!

### Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>:

Ένα μικρό φορτισμένο σωματίδιο με φορτίο  $q_2=+2\mu\text{C}$  αφήνεται ελεύθερο σε σημείο A, το οποίο απέχει 1cm από ακλόνητο σημειακό φορτίο  $q_1=3\mu\text{C}$ . Να βρεθεί το έργο που παράγεται από τη δύναμη του πεδίου, μέχρι να μετακινηθεί το σωματίδιο κατά 2cm ερχόμενο στη θέση B. Τι εκφράζει το παραπάνω έργο;



### Απάντηση:

Το έργο της δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο είναι ίσο με:

$$W_{AB} = q_2(V_A - V_B) = q_2 \left( k_c \frac{q_1}{r_1} - k_c \frac{q_1}{r_2} \right) = k_c q_1 q_2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \rightarrow$$

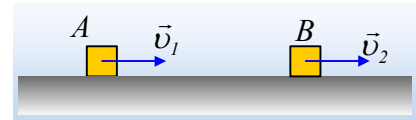
$$W_{AB} = 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \left( \frac{1}{1 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{3 \cdot 10^{-2}} \right) J = 3,6J$$

Το παραπάνω έργο, είναι το έργο που παράγει επί του σωματιδίου η δύναμη F, συνεπώς είναι το έργο που παράγεται από μια δύναμη ηλεκτροστατικού πεδίου, πάνω στο σωματίδιο. Είναι θετικό, πράγμα που σημαίνει ότι αυξάνεται η κινητική ενέργεια του σωματιδίου. Αλλά αυτή η αύξηση, δεν προήλθε από το μηδέν!

Κατά τη διάρκεια της κίνησης μειώνεται η δυναμική ενέργεια (του συστήματος των δύο φορτίων) κατά 3,6J.

### Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>:

Σε οριζόντιο επίπεδο κινείται ένα μικρό σώμα που φέρει φορτίο  $q=1\mu\text{C}$ . Σε μια στιγμή περνά από μια θέση Α έχοντας ταχύτητα  $v_1=2\text{m/s}$  παράλληλη προς τις δυναμικές γραμμές ενός ηλεκτρικού πεδίου. Το δυναμικό του πεδίου στο Α έχει τιμή  $V_A=1.000\text{V}$ . Η τριβή ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι ίση με  $0,04\text{N}$ . Μετά από λίγο το σώμα έχει μετατοπισθεί κατά  $2\text{cm}$  φτάνοντας στη θέση Β, με δυναμικό  $V_B=200\text{V}$ .



- Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης του πεδίου.
- Να βρεθεί η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική κατά την παραπάνω μετακίνηση.
- Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος στη θέση Β.

### Απάντηση:

- Το έργο που παράγει η δύναμη του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσο:

$$W_F = W_{AB} = q(V_A - V_B) = 10^{-6}(1.000 - 200)\text{J} = 8 \cdot 10^{-4}\text{J}$$

- Το αντίστοιχο έργο της τριβής είναι:

$$W_T = -T \cdot \Delta x = -0,04 \cdot 2 \cdot 10^{-2}\text{J} = -8 \cdot 10^{-4}\text{J}$$

Συνεπώς η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική είναι ίση με  $Q=|W_T|=8 \cdot 10^{-4}\text{J}$ .

- Εφαρμόζοντας για την παραπάνω κίνηση το Θ.Μ.Κ.Ε. παίρνουμε:

$$K_\tau - K_a = W_F + W_T \rightarrow$$

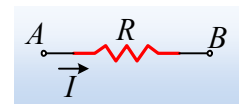
$$K_\tau = K_a \rightarrow v_2 = v_1$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σώμα «πήρε» ενέργεια από το ηλεκτρικό πεδίο  $8 \cdot 10^{-4}\text{J}$  την οποία «έχασε» μέσω του έργου της τριβής, μετατρέπόμενη σε θερμική.

Ας έρθουμε τώρα σε ένα τμήμα κυκλώματος το οποίο διαρρέεται από ρεύμα. Όπως είναι γνωστό τα κινούμενα φορτία (τα ελεύθερα ηλεκτρόνια σε έναν μεταλλικό αγωγό), δεν κινούνται ευθύγραμμα, εκτελώντας μια άτακτη κίνηση, αλλά η ουσία είναι ακριβώς ίδια, με το να θεωρήσουμε ότι αυτά κινούνται με μια σταθερή ταχύτητα διολίσθησης  $v_d$ .

### Παράδειγμα 4<sup>ο</sup>:

Στο διπλανό τμήμα κυκλώματος δίνονται τα δυναμικά των σημείων Α και Β,  $40\text{V}$  και  $10\text{V}$  αντίστοιχα. Το τμήμα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης  $I=2\text{A}$ .



- Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται από το πεδίο μέσα σε χρονικό διάστημα  $3\text{s}$ , κατά την μετακίνηση των φορτίων από το Α στο Β.
- Πόση είναι η αντίστοιχη θερμότητα που παράγεται πάνω στον αντιστάτη.
- Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο το ηλεκτρικό ρεύμα παρέχει ενέργεια στον αντιστάτη.

### Απάντηση:

- Το συνολικό φορτίο που μεταφέρεται από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ίσο:

$$q = I \cdot \Delta t = 6C.$$

Αλλά τότε παράγεται από το ηλεκτρικό πεδίο, που προκαλεί την μετακίνηση, έργο:

$$W_{AB} = q(V_A - V_B) = 6 \cdot (40 - 10)J = 180J$$

**Σχόλιο:**

Το παραπάνω έργο μπορεί να γραφεί:

$$W_{AB} = q(V_A - V_B) = (I \cdot t)V_{AB} = VIt$$

Προκύπτοντας έτσι η γνωστή μας σχέση για την **ηλεκτρική ενέργεια**. Δηλαδή για την ενέργεια που το ηλεκτρικό ρεύμα μεταφέρει στο τμήμα AB του κυκλώματος.

- ii) Θα μπορούσαμε, χωρίς άλλη σκέψη αλλά μόνο από τη διατήρηση της ενέργειας, να πούμε ότι όση ενέργεια μεταφέρεται στο τμήμα AB, από το ηλεκτρικό ρεύμα, τόση θα εμφανιστεί με τη μορφή της θερμότητας, πάνω στον αντιστάτη, δηλαδή  $Q = W_{AB} = 180J$ .

Αλλά και αν εφαρμόσουμε το νόμο του Joule, θα πάρουμε:

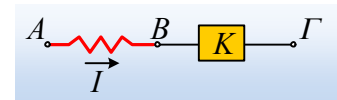
$$Q = I^2 R t = I(IR)t = VIt = 180J$$

- iii) Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στο τμήμα AB, ονομάζεται και «**ισχύς του ρεύματος**» είναι:

$$\frac{dW_{AB}}{dt} = P = \frac{VIt}{dt} = VI = 60J/s$$

### Παράδειγμα 5<sup>ο</sup>:

A) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα τμήμα κυκλώματος, όπου  $V_A = 200V$ ,  $V_\Gamma = 40V$ ,  $I = 2A$  και  $R = 20\Omega$ . Να βρεθεί η ισχύς του ρεύματος στον αντιστάτη και στο αδιαφανές κιβώτιο K.



### Απάντηση:

Από τον νόμο του Ohm για τον αντιστάτη παίρνουμε  $V_{AB} = I \cdot R = 40V$ , αλλά αφού  $V_{AB} = V_A - V_B$  θα έχουμε ότι:

$$V_B = V_A - V_{AB} = 200V - 40V = 160V.$$

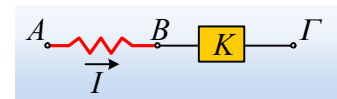
Συνεπώς η ισχύς του ρεύματος στον αντιστάτη (ο ρυθμός με τον οποίο το ηλεκτρικό ρεύμα μεταφέρει ενέργεια στον αντιστάτη) είναι:

$$P_R = V_{AB} \cdot I = 80W.$$

Ενώ η ισχύς που μεταφέρεται και αποδίδεται στο αδιαφανές κιβώτιο K:

$$P_K = V_{B\Gamma} \cdot I = (V_B - V_\Gamma) \cdot I = 240W.$$

B) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα τμήμα κυκλώματος, όπου  $V_A = 100V$ ,  $V_\Gamma = 60V$ ,  $I = 3A$  και  $R = 20\Omega$ . Να βρεθεί η ισχύς του ρεύματος στον αντιστάτη και στο αδιαφανές κιβώτιο K.



### Απάντηση:

Από τον νόμο του Ohm για τον αντιστάτη παίρνουμε  $V_{AB} = I \cdot R = 60V$ , αλλά αφού  $V_{AB} = V_A - V_B$  θα έχουμε ότι:

$$V_B = V_A - V_{AB} = 100V - 60V = 40V.$$

Συνεπώς η ισχύς του ρεύματος στον αντιστάτη (ο ρυθμός με τον οποίο το ηλεκτρικό ρεύμα μεταφέρει ενέργεια στον αντιστάτη) είναι:

$$P_R = V_{AB} \cdot I = 180W.$$

Ενώ η ισχύς που μεταφέρεται και αποδίδεται στο αδιαφανές κιβώτιο Κ:

$$P_K = V_{B\Gamma} \cdot I = (V_B - V_\Gamma) \cdot I = (40V - 60V) \cdot 3A = -60W.$$

Τι σημαίνει η αρνητική ισχύς που υπολογίσαμε για το αδιαφανές κιβώτιο; Τι σημαίνει ότι η ισχύς που **αποδίδει** το ηλεκτρικό ρεύμα στο κιβώτιο είναι  $-60W$ ; Μα, ότι τελικά το ρεύμα δεν προσφέρει ενέργεια στο κιβώτιο, αλλά αντίθετα **απορροφά** ενέργεια από αυτό. Με άλλα λόγια τα φορτία κινούμενα από το σημείο Β στο Γ, δεν αποδίδουν ενέργεια, αλλά κερδίζουν. Εξάλλου εύκολα διαπιστώνεται ότι η δυναμική τους ενέργεια ( $q \cdot V$ ) αυξάνεται, αφού μετακινούνται σε μεγαλύτερο δυναμικό.

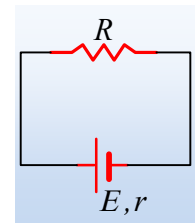
Αλλά τότε τι μπορεί να περιέχει το κιβώτιο που να παρέχει ενέργεια στα φορτία;

Έτσι φτάνουμε στην ηλεκτρική πηγή!

### Παράδειγμα 6<sup>ο</sup>:

Για το διπλανό κύκλωμα δίνονται  $E=20V$ ,  $r=2\Omega$  και  $R=3\Omega$ .

- Τι σημαίνει ότι η πηγή έχει Ηλεκτρεγερτική δύναμη 20V;
- Τι ακριβώς συμβαίνει με την ισχύ στο κύκλωμα αυτό;



### Απάντηση:

- Ο ρόλος μιας πηγής σε ένα κύκλωμα, είναι να προσφέρει ενέργεια στα φορτία (κατά σύμβαση θετικά), μεταφέροντάς τα από τον αρνητικό στο θετικό της πόλο.

Ορίζουμε ως ΗΕΔ της πηγής, το σταθερό πηλίκο της ενέργειας που παρέχει η πηγή σε ένα φορτίο, μεταφέροντάς το από τον αρνητικό στο θετικό της πόλο, προς το φορτίο:

$$E = \frac{dW}{dq}$$

Η διαιρώντας με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα, ως το πηλίκο της ισχύος που παρέχει η πηγή στο ηλεκτρικό ρεύμα, προς την ένταση του ρεύματος:

$$E = \frac{dW}{dq} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{dq}{dt}} = \frac{P}{I}$$

Από όπου προκύπτει ότι ο ρυθμός με τον οποίο η πηγή **προσφέρει ενέργεια στο κύκλωμα**, η ισχύς της πηγής, είναι  $P=E \cdot I$ .

Έτσι στο παράδειγμά μας σημαίνει ότι η πηγή παρέχει στο κύκλωμα ενέργεια με ρυθμό 20J/s.

- Ένα ερώτημα, χωρίς απάντηση!!!

Από τα παραπάνω πρέπει να γίνεται σαφές ότι σε ένα κύκλωμα μπορούμε να μιλάμε για την ισχύ την οποία παρέχει το ηλεκτρικό ρεύμα σε κάποιο στοιχείο ή για την ενέργεια που παρέχει μια πηγή στο κύκλωμα, δηλαδή στο ηλεκτρικό ρεύμα. Έτσι διατύπωση η ισχύς, χωρίς άλλο προσδιορισμό, μπορεί να οδηγήσει σε παρανοήσεις.

Ας εφαρμόσουμε στο παραπάνω κύκλωμα το νόμο του Ohm:

$$I = \frac{E}{R+r} = 4A$$

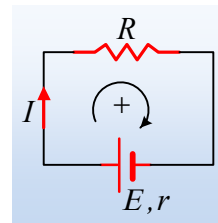
Η σχέση αυτή γράφεται και:

$$E=I(R+r) \text{ ή}$$

$$E=IR+Ir \text{ ή}$$

$$E-IR-Ir=0 \quad (1)$$

Όπου η τελευταία εξίσωση είναι γνωστή ως ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoff (το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών δυναμικού κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι μηδέν). Αλλά ας μην ξεχνάμε ότι η εφαρμογή του και η κατάληξη στην εξίσωση (1) προϋποθέτει μια φορά διαγραφής του κυκλώματος, όπως στο σχήμα και τότε η ένταση του ρεύματος θεωρείται θετική, με την έννοια ότι έχει φορά, ίδια με αυτή που ορίσαμε ως θετική.



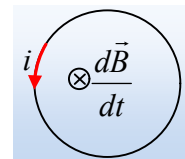
Αλλά τότε πολλαπλασιάζοντας την (1) με I παίρνουμε:

$$EI-I^2R-I^2r=0$$

Όπου θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για την ισχύ την οποία **προσφέρει** κάθε στοιχείο στο κύκλωμα και όπου η ισχύς της πηγής είναι θετική, ενώ η ισχύς του αντιστάτη και της εσωτερικής αντίστασης είναι αρνητική, με την έννοια ότι δεν προσφέρουν αλλά αφαιρούν ενέργεια από το κύκλωμα.

### Σημείωση:

Στην πραγματικότητα η Ηλεκτρεγερτική δύναμη αναφέρεται σε ένα κύκλωμα και είναι αυτή που παρέχει ενέργεια στα φορτία, ώστε να κινηθούν προσανατολισμένα και να εμφανιστεί στο κύκλωμα η ενέργεια που ονομάζουμε Ηλεκτρική ενέργεια. Αρκεί να φέρουμε στη σκέψη μας την περίπτωση της επαγωγής, για παράδειγμα την κατάσταση που έχουμε, όταν ένας κυκλικός αγωγός βρίσκεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές ενός χρονικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου. Τότε ο κυκλικός αγωγός διαρρέεται από ρεύμα, αφού στο κύκλωμα εμφανίζεται ΗΕΔ λόγω



$$\text{επαγωγής } E = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Παρόλα αυτά, συνήθως όταν μιλάμε για ΗΕΔ, στο μυαλό μας φέρνουμε κάποια συγκεκριμένη ηλεκτρική πηγή.

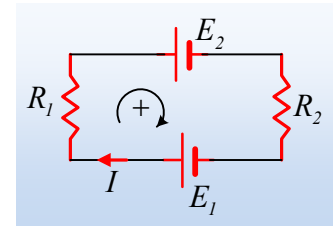
Ας δούμε λίγο αναλυτικότερα τα παραπάνω, που αφορούν πηγές και καταναλωτές ηλεκτρικής ενέργειας.

**Παράδειγμα 7<sup>ο</sup>:**

Για το διπλανό κύκλωμα, δίνονται  $E_1=40V$ ,  $E_2=10V$ ,  $R_1=10\Omega$  και  $R_2=5\Omega$ .

Να βρεθούν:

- Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.
- Η ισχύς κάθε πηγής.
- Ο ρυθμός με τον οποίο η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα στους αντιστάτες.
- Να βρεθεί επίσης η ένταση του ρεύματος αν  $E_2=55V$ .

**Απάντηση:**

- Εφαρμόζουμε το 2<sup>ο</sup> κανόνα του Kirchhoff με φορά διαγραφής την σημειωμένη στο σχήμα και παίρνουμε:

$$E_1 - IR_1 - E_2 - IR_2 = 0 \rightarrow$$

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{40V - 10V}{10\Omega + 5\Omega} = 2A$$

- Η ισχύς της ΗΕΔ  $E_1$  είναι  $P_1 = E_1 \cdot I = 80W$ , ενώ της  $E_2$   $P_2 = -E_2 \cdot I = -20W$ .

- Στους αντιστάτες παράγεται θερμότητα με ρυθμούς:

$$P_{R1} = I^2 \cdot R_1 = 40W \quad \text{και} \quad P_{R2} = I^2 \cdot R_2 = 20W$$

Αξίζει να προσεχθεί ότι ενέργεια στο κύκλωμα προσφέρει η πηγή  $E_1$ , 80J/s και ένα μέρος (20J/s) απορροφά η πηγή  $E_2$ , ενώ το υπόλοιπο (40J/s+20J/s) μετατρέπεται σε θερμική και τελικά μεταφέρεται με τη μορφή της θερμότητας στο περιβάλλον.

- Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο έχουμε:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{40V - 55V}{10\Omega + 5\Omega} = -1A$$

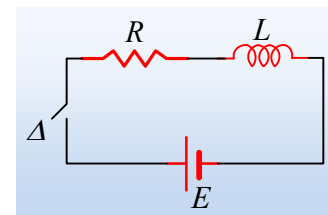
Η αρνητική τιμή που υπολογίσαμε, σημαίνει ότι το ρεύμα έχει αντίθετη φορά, που σημαίνει ότι τώρα η ΗΕΔ  $E_2$  λειτουργεί ως πηγή, ενώ αντίθετα η  $E_1$  ως αποδέκτης.

Ας δούμε τώρα τρία παραδείγματα, με χρήση πηνίου και πυκνωτή και πώς μπορούν να λειτουργούν σε ένα κύκλωμα.

**Παράδειγμα 8<sup>ο</sup>:**

Για το διπλανό κύκλωμα, δίνονται  $E=40V$ ,  $R=4\Omega$ , ενώ το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής  $L=4mH$ . Σε μια στιγμή κλείνουμε το διακόπτη. Για τη χρονική στιγμή που η ένταση του ρεύματος πάρει την τιμή  $i_1=6A$ , να βρεθούν:

- Η τάση στα άκρα του πηνίου και η ΗΕΔ λόγω αυτεπαγωγής που αναπτύσσεται στο πηνίο.
- Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος.



iii) Η ισχύς της πηγής και του πηνίου.

### Απάντηση:

- i) Κλείνοντας το διακόπτη το κύκλωμα αρχίζει να διαρρέεται από ρεύμα, όπως στο διπλανό σχήμα. Ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoff μας δίνει:

$$E - V_{AB} - V_{B\Gamma} = 0 \quad (1)$$

Όπου δεχόμαστε ότι οι τάσεις είναι θετικές (η τάση  $V_{AB}$  είναι σίγουρα θετική αφού σε έναν αντιστάτη το ρεύμα μεταφέρεται από ψηλότερο δυναμικό σε χαμηλότερο, αλλά στο πηνίο χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή και εφαρμογή του κανόνα του Lenz...)

Αλλά  $V_{AB} = i \cdot R = 24V$  και από την (1) παίρνουμε  $V_{B\Gamma} = E - V_{AB} = 40V - 24V = 16V$ .

Η τιμή της τάσης  $V_L$  που υπολογίσαμε  $+16V$ , αποδεικνύει ότι το άκρο B του πηνίου είναι θετικό, πράγμα που σημαίνει ότι το ισοδύναμο κύκλωμα, είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

Αλλά τότε αφού πήραμε την συγκεκριμένη φορά διαγραφής του κυκλώματος (στην πραγματικότητα του βρόγχου μας) ως θετική, θα έχουμε  $E = +40V$  και  $E_{avt} = -16V$ .

Από το νόμο της αυτεπαγωγής παίρνουμε:

$$E_{avt} = -L \frac{di}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{E_{avt}}{L} = -\frac{-16V}{4 \cdot 10^{-3} H} = +4.000 A/s$$

- ii) Η πηγή παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα και ο αντίστοιχος ρυθμός (η ισχύς της) είναι

$$P_E = E \cdot i = 240W$$

Αντίστοιχα, αν αντιμετωπίσουμε το πηνίο σαν πηγή, θα έχουμε:

$$P_L = E_{avt} \cdot i = -16V \cdot 6 A = -96W.$$

Η αρνητική τιμή ισχύος που υπολογίσαμε μας λέει ότι τελικά το πηνίο δεν παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα, αλλά απορροφά ενέργεια από το ρεύμα με ρυθμό  $96J/s$ , αυξάνοντας την ενέργεια του μα-

γνητικού του πεδίου, δηλαδή  $\frac{dU_B}{dt} = +96 J/s$ .

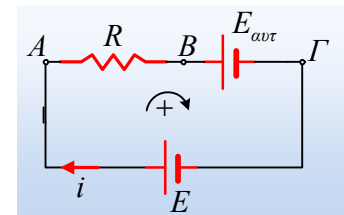
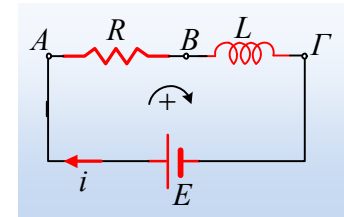
Αλλά αν ασχολούμαστε με την ισχύ του ρεύματος, δηλαδή τον ρυθμό με τον οποίο το ηλεκτρικό ρεύμα αποδίδει ενέργεια στα διάφορα στοιχεία του κυκλώματος, θα είχαμε ότι:

$$P_L = V_{B\Gamma} \cdot i = 16V \cdot 6 A = +96W$$

Πράγμα βέβαια σωστό, αφού μας λέει ότι το ηλεκτρικό ρεύμα δίνει ενέργεια στο πηνίο, συνεπώς η ενέργειά του μαγνητικού του πεδίου, αυξάνεται...

Ερώτηση: Τι λέτε, έχει απάντηση το ερώτημα «να βρεθεί η ισχύς του πηνίου»;

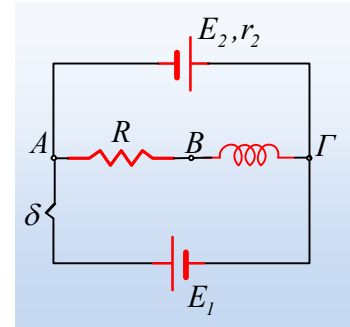
### Παράδειγμα 9<sup>ο</sup>:





Στο διπλανό κύκλωμα τη στιγμή  $t=0$  κλείνουμε το διακόπτη  $\delta$ . Αν  $E_1=40V$ ,  $E_2=20V$  και  $r_2=2\Omega$ ,  $R=4\Omega$  ενώ το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής  $L=0,04H$ , ζητούνται:

- Να βρεθεί η ισχύς κάθε πηγής και ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του πηνίου, τη στιγμή  $t_1$ , που ο αντιστάτης διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $i=4A$ .
- Μόλις σταθεροποιηθεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο, τη στιγμή  $t_2$  ανοίγουμε το διακόπτη  $\delta$ . Για αμέσως μετά να βρεθεί η ισχύς της πηγής  $E_2$  και ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του πηνίου. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο;



### Απάντηση:

- Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν τους τρεις κλάδους του κυκλώματος τη στιγμή  $t_1$ .

Από το 2<sup>ο</sup> κανόνα του Kirchhoff στο μεγάλο βρόγχο παίρνουμε:

$$E_1 + E_2 - i_2 \cdot r_2 = 0 \rightarrow$$

$$i_2 = \frac{E_1 + E_2}{r_2} = \frac{40V + 20V}{2\Omega} = 30A$$

Και από τον 1<sup>ο</sup> νόμο του Kirchhoff στον κόμβο A, έχουμε:

$$i_1 = i + i_2 = 4A + 30A = 34A$$

Αλλά  $V_{AG} = V_{AB} + V_{BG} \rightarrow V_{BG} = V_L = E_1 - iR = 40V - 4 \cdot 4V = 24V$ .

Με βάση αυτά έχουμε:

$$P_1 = E_1 \cdot i_1 = 40V \cdot 34A = 1360W$$

$$P_2 = E_2 \cdot i_2 = 20V \cdot 30A = 600W$$

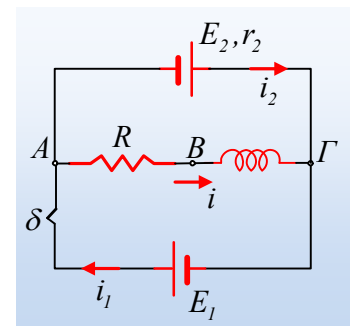
Όπου  $P_1$  και  $P_2$  η ισχύς κάθε πηγής, δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο παρέχουν ενέργεια στο κύκλωμα. Αλλά το πηνίο έχει στα άκρα του τάση  $V_{BG}=24V$ , πράγμα που σημαίνει ότι εμφανίζεται πάνω του ΗΕΔ λόγω αυτεπαγωγής με θετικό πόλο το άκρο B. Αλλά τότε αφού πήραμε  $E_1=+40V$ , η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή έχει αντίθετη πολικότητα συνεπώς  $E_{αυτ} = -24V$ . Αντιμετωπίζοντας λοιπόν το πηνίο ως ΗΕΔ έχουμε:

$$P_L = E_{αυτ} \cdot i = -24V \cdot 4A = -96W$$

Πράγμα που σημαίνει ότι δεν παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα, αλλά αφαιρεί ενέργεια από το κύκλωμα με ρυθμό  $96J/s$ , οπότε η ενέργεια του μαγνητικού του πεδίου αυξάνεται με ρυθμό:

$$\frac{dU_B}{dt} = +96J/s.$$

- Μόλις ανοίξουμε το διακόπτη, το πηνίο θα συνεχίσει να διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $4A$ , το οποίο θα περάσει και από την πηγή  $E_2$ . Αλλά τότε:



$$P_2 = -E_2 \cdot i = -20V \cdot 4A = -80W$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η πηγή  $E_2$  απορροφά ενέργεια από το κύκλωμα! (φανταστείτε το κινητό σας, όταν φορτίζεται...).

Εξάλλου από το 2<sup>ο</sup> κανόνα του Kirchhoff παίρνουμε:

$$-iR + E_{avt} - ir_2 - E_2 = 0 \rightarrow$$

$$E_{avt} = iR + ir_2 + E_2 = 4 \cdot 4V + 4 \cdot 2V + 20V = 44V$$

Όπου από τον κανόνα του Lenz συμπεράναμε ότι η αναπτυσσόμενη ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, έχει τον θετικό της πόλο στο άκρο  $\Gamma$  και για το λόγο αυτό θεωρήθηκε θετική, όπως θετική πήραμε και την ένταση του ρεύματος.

Αλλά τότε η ισχύς της  $E_{avt}$ , δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα, είναι:

$$P_L = E_{avt} \cdot i = 44V \cdot 4A = +176W$$

Οπότε η ενέργεια του μαγνητικού του πεδίου, μειώνεται με αποτέλεσμα ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειάς του είναι:

$$\frac{dU_B}{dt} = -176J/s$$

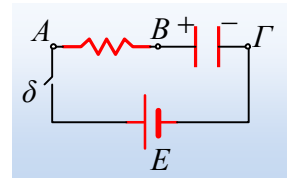
$$\text{Εξάλλου } E_{avt} = -L \frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{E_{avt}}{L} = -\frac{44V}{0,04H} = -1100A/s.$$

### Παράδειγμα 10<sup>ο</sup>:

Για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος,  $E=10V$ ,  $R=2\Omega$  ενώ ο πυκνωτής χωρητικότητας  $2\mu F$  φέρει φορτίο  $Q$ . Σε μια στιγμή κλείνουμε το διακόπτη. Για τη στιγμή αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη, να βρεθούν:

- Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.
- Η ισχύς της πηγής.
- Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή.

$$\text{A) } \Delta n Q = 12\mu C, \quad \text{B) } \Delta n Q = 24\mu C.$$



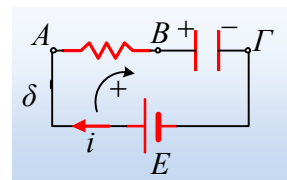
### Απάντηση:

A) Αν  $Q=12\mu C$ , τότε η τάση του πυκνωτή είναι  $V_c = \frac{Q}{C} = 6V = V_{B\Gamma}$ . Το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα όπως στο σχήμα, η ένταση του οποίου θεωρείται θετική, όπως εξάλλου και η ΗΕΔ  $E$ .

- Εφαρμόζοντας το 2<sup>ο</sup> κανόνα του Kirchhoff παίρνουμε:

$$E - V_{AB} - V_{B\Gamma} = 0 \rightarrow$$

$$E - iR - V_c = 0 \rightarrow$$



$$i = \frac{E - V_c}{R} = \frac{10V - 6V}{2\Omega} = 2A$$

ii) Η ισχύς της πηγής, δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο **παρέχει** ενέργεια στο κύκλωμα, είναι:

$$P_E = E \cdot i = 10V \cdot 2A = 20W.$$

iii) Η **ισχύς του ρεύματος** στο τμήμα ΒΓ, συνεπώς ο ρυθμός με τον οποίο το ηλεκτρικό ρεύμα μεταφέρει ενέργεια στον πυκνωτή, είναι:

$$P_c = V_{B\Gamma} \cdot i = 6V \cdot 2A = 12W$$

Αλλά τότε ο πυκνωτής φορτίζεται και η ενέργεια του ηλεκτρικού του πεδίου μεταβάλλεται (αυξάνεται) με ρυθμό:

$$\frac{dU_E}{dt} = 12J/s.$$

B) Αν  $Q=24\mu C$ , τότε η τάση του πυκνωτή είναι  $V_c = \frac{Q}{C} = 12V = V_{B\Gamma}$ . Έστω ότι το κύκλωμα διαρρέεται

από ρεύμα όπως στο σχήμα, η ένταση του οποίου θεωρείται θετική, όπως εξάλλου και η ΗΕΔ Ε.

i) Εφαρμόζοντας το 2<sup>ο</sup> κανόνα του Kirchhoff παίρνουμε:

$$E - V_{AB} - V_{B\Gamma} = 0 \rightarrow$$

$$E - iR - V_c = 0 \rightarrow$$

$$i = \frac{E - V_c}{R} = \frac{10V - 12V}{2\Omega} = -1A$$

Το αποτέλεσμα που καταλήξαμε, μας λέει ότι τελικά το ρεύμα έχει αντίθετη φορά από αυτήν που υποθέσαμε και ο πυκνωτής συνεπώς ...εκφορτίζεται.

ii) Η ισχύς της πηγής, δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο **παρέχει** ενέργεια στο κύκλωμα, είναι:

$$P_E = E \cdot i = 10V \cdot (-1)A = -10W.$$

Η πηγή συνεπώς δεν παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα, αλλά αφαιρεί. Να το πούμε αλλιώς δεν λειτουργεί ως πηγή, αλλά ως αποδέκτης.

iii) Η **ισχύς του ρεύματος** στο τμήμα ΒΓ, συνεπώς ο ρυθμός με τον οποίο το ηλεκτρικό ρεύμα μεταφέρει ενέργεια στον πυκνωτή, είναι:

$$P_c = V_{B\Gamma} \cdot i = 12V \cdot (-1)A = -12W$$

Αλλά τότε ο πυκνωτής, δεν παίρνει ενέργεια από το κύκλωμα αλλά προσφέρει ενέργεια στο κύκλωμα, εκφορτιζόμενος και η ενέργεια του ηλεκτρικού του πεδίου μεταβάλλεται (μειώνεται) με ρυθμό:

$$\frac{dU_E}{dt} = -12J/s.$$

### Σχόλια:

1) Στη Β) παραπάνω περίπτωση, επιλέξαμε να δουλέψουμε ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, με την Α), μη βλέποντας ότι έχουμε την περίπτωση που ο πυκνωτής εκφορτίζεται αφού λειτουργεί ως πηγή. Θα μπορούσαμε να το έχουμε δει!!! Και να το αντιμετωπίζαμε ευκολότερα. Αλλά και να μην το κάνουμε, δεν αλ-

λάζει και κάτι..

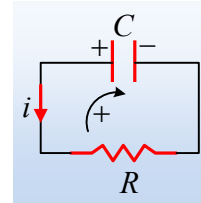
- 2) Με την συγκεκριμένη πολικότητα του πυκνωτή, αλλά και τη συγκεκριμένη φορά διαγραφής που θεωρήσαμε θετική (ωρολογιακή), μπορούμε να δούμε το πρόσημο της έντασης του ρεύματος.

Στην Α) περίπτωση η ένταση του ρεύματος κατευθύνεται στο θετικό οπλισμό και είναι θετική. Στην Β) περίπτωση είναι αρνητική, συνεπώς έχει αντιωρολογιακή φορά ή αν προτιμάτε θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι (θετικά) φορτία φεύγουν από το θετικό οπλισμό του πυκνωτή.

- 3) Ας πάρουμε το διπλανό κύκλωμα που ένας φορτισμένος πυκνωτής θα εκφορτισθεί, μόλις κλείσουμε το διακόπτη. Η ένταση του ρεύματος λαμβάνεται ως **αρνητική**, αφού:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

και στη διάρκεια της εκφόρτισης το φορτίο του πυκνωτή μειώνεται συνεπώς η μεταβολή του φορτίου του είναι αρνητική. Αλλά αυτό ισοδύναμα εκφράζεται με το να πούμε ότι η θετική φορά διαγραφής του κυκλώματος είναι η ωρολογιακή, όπως έχει σημειωθεί στο σχήμα.

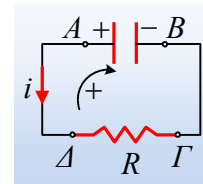


- 4) Ας μείνουμε για λίγο ακόμη στο προηγούμενο κύκλωμα. Αν πάρουμε τις τάσεις, τις διαφορές δυναμικού, με βάση τη φορά διαγραφής, η οποία θεωρείται θετική, έχουμε:

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_\Gamma) + (V_\Gamma - V_\Delta) + (V_\Delta - V_A) = 0 \rightarrow$$

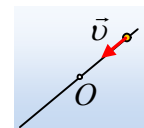
$$V_{AB} + V_{\Gamma\Delta} = 0 \text{ ή}$$

$$V_{\Gamma\Delta} = -V_{AB}$$



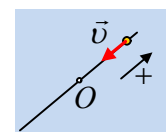
Ας κάνουμε τώρα μια στάση να εξετάσουμε κάτι άλλο.

Ένα σώμα κάνει ΑΑΤ και σε μια στιγμή απέχει κατά 2cm από τη θέση ισορροπίας του, έχοντας ταχύτητα μέτρου 1m/s. Πόση είναι η απομάκρυνσή του; Είναι  $x=+2\text{cm}$  ή μήπως  $x=-2\text{cm}$ ; Και η ταχύτητά του είναι ίση με  $+1\text{m/s}$  ή  $-1\text{m/s}$ ;



Η απάντηση είναι νομίζω εύκολη. Εξαρτάται πού εμείς θα αποφασίσουμε να ορίσουμε τα θετικά.

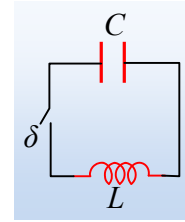
Έτσι αν κάποιος αποφασίσει να πάρει τα θετικά, όπως στο διπλανό σχήμα, θα απαντήσει  $x=+2\text{cm}$  και  $v=-1\text{m/s}$ . Και θα είναι σωστός.



Αν όμως ένα άλλος ορίσει αντίθετα τα πράγματα, τότε θα απαντήσει ότι  $x=-2\text{cm}$  και  $v=+1\text{m/s}$ . Προφανώς και αυτή η απάντηση είναι σωστή.

Προσοχή όμως. Ορίζοντας προς τα πού είναι οι θετικές απομακρύνσεις, ταυτόχρονα ορίζει και τις θετικές ταχύτητες.

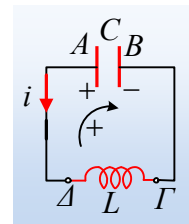
Και ας έρθουμε τώρα σε ένα κύκλωμα LC, όπως στο διπλανό σχήμα, για το οποίο μας δίνεται ότι ο πυκνωτής έχει φορτισθεί με τάση  $V=10V$  και τη στιγμή  $t=0$  κλείνουμε το διακόπτη. Αμέσως μετά, ποιο είναι το πρόσημο για τα μεγέθη: φορτίο πυκνωτή, ένταση ρεύματος, τάση πυκνωτή, τάση του πηνίου και ΗΕΔ από αυτεπαγωγή του πηνίου;



Δεν μπορούν να απαντηθούν τα παραπάνω ερωτήματα, αν προηγουμένως δεν ορίσουμε

ποιος οπλισμός του πυκνωτή φέρει το θετικό φορτίο. Ο ορισμός αυτός είναι αυθαίρετος, όπως αυθαίρετα ορίζουμε την θετική κατεύθυνση στις μηχανικές ταλαντώσεις. Έχουμε το δικαίωμα να ορίσουμε αυθαίρετα τον θετικό οπλισμό, αλλά αυτός ο ορισμός θα συμπαρασύρει και τα πρόσημα όλων των άλλων μεγεθών που αναφέρθηκαν.

Έστω λοιπόν, ότι δεχόμαστε ότι ο οπλισμός Α φέρει θετικό φορτίο τη στιγμή  $t=0$ . Ο οπλισμός αυτός θα είναι ο οπλισμός αναφοράς μας και στο φορτίο του θα αναφερόμαστε, από δω και πέρα, ονομάζοντάς το «φορτίο πυκνωτή». Αλλά αν λάβουμε υπόψη ότι  $q=CV$ , σε θετικό φορτίο αντιστοιχεί και θετική τάση. Αν λοιπόν το  $q>0$  και η αντίστοιχη τάση του πυκνωτή  $V_C>0$ . Συνεπώς μιλώντας για θετική τάση, εννοούμε την τάση  $V_C=V_{AB}=+10V$



και η θετική φορά διαγραφής θα είναι όπως στο σχήμα (ωρολογιακή φορά), αφού η ένταση του ρεύματος με φορά προς τον οπλισμό Α, θα επιφέρει αύξηση του φορτίου του πυκνωτή. Όμως εδώ ο πυκνωτής εκφορτίζεται και η ένταση του ρεύματος θα είναι όπως στο σχήμα, αλλά τότε  $i<0$ , αφού είναι αντίθετης φοράς, από αυτήν που πήραμε ως θετική.

Από τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff θα πάρουμε (με τη φορά διαγραφής):

$$V_{AB}+V_{\Gamma\Delta}=0 \text{ ή}$$

$$V_{\Gamma\Delta}=-V_{AB} < 0 \text{ ή}$$

$$V_L < 0$$

Δηλαδή μιλώντας για τάση στο πηνίο αυτή θα είναι αρνητική και μάλιστα  $V_L = -10V$ . Τι σημαίνει αρνητική τάση; Σημαίνει ότι το δυναμικό στο Γ είναι μικρότερο από το δυναμικό στο Δ. Να το πούμε αλλιώς;

Το πηνίο λειτουργεί ως μια ηλεκτρεγερτική δύναμη με τον θετικό πόλο στο άκρο του Δ.

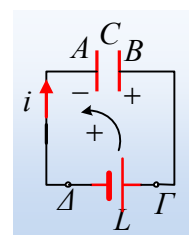
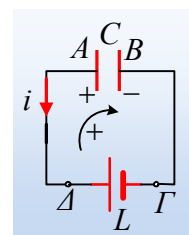
Πόση είναι τώρα δηλαδή η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή; Με βάση τη φορά διαγραφής:

$$E_{\text{αυτ}} = +10V.$$

Τι σημαίνει η θετική τιμή της ΗΕΔ; Ότι τείνει να δημιουργήσει στο κύκλωμα μια θετική ένταση ρεύματος!!!

Προφανώς θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τον οπλισμό Β να έχει το θετικό φορτίο. Η κατάσταση θα μπορούσε να μελετηθεί εξίσου σωστά, απλά τώρα θα είχαμε τα πρόσημα με βάση τη νέα φορά διαγραφής, δηλαδή  $V_{BA}>0$ ,  $i<0$ ,  $q>0$ ,  $V_L<0$  και  $E_{\text{αυτ}}>0$ . Ας προσέξουμε ότι η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή τώρα έχει αντίθετη πολικότητα από πριν, αλλά και πάλι με βάση την νέα φορά διαγραφής θεωρείται θετική.

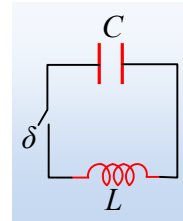
Σε όλα τα παραπάνω δεν εφαρμόσαμε καθόλου τον κανόνα του Lenz, με την βοήθεια του οποίου θα μπο-



ρούσαμε να καταλήξουμε ευκολότερα στην πολικότητα της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή.

### Παράδειγμα 11<sup>ο</sup>:

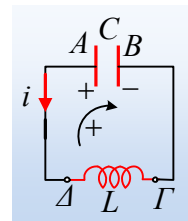
Στο ιδανικό κύκλωμα LC του σχήματος, δίνονται ότι  $C=20\mu\text{F}$  και  $L=4\text{mH}$ . Ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με φορτίο  $Q=40\mu\text{C}$ . Τη στιγμή  $t=0$  κλείνουμε το διακόπτη. Για τη χρονική στιγμή που το φορτίο του πυκνωτή γίνεται ίσο με  $q=20\mu\text{C}$ , για πρώτη φορά, να βρεθούν:



- i) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.
- ii) Η τάση του πυκνωτή  $V_c$  και η τάση του πηνίου  $V_L$ , όπως και η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στο πηνίο.
- iii) Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος.
- iv) Η ισχύς του πυκνωτή και η ισχύς του πηνίου.

### Απάντηση:

Πριν προχωρήσουμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα, θα πρέπει να αποφασίσουμε ποιος είναι ο οπλισμός αναφοράς μας, δηλαδή ποιος οπλισμός θεωρούμε ότι φέρει το θετικό φορτίο. Έστω ότι ο οπλισμός Α φέρει το θετικό φορτίο. Τότε η θετική φορά διαγραφής του κυκλώματος είναι η ωρολογιακή όπως στο σχήμα.



- i) Μόλις κλείσουμε το διακόπτη ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται. Με βάση τη διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \rightarrow$$

$$i = \pm \sqrt{\frac{1}{LC} (Q^2 - q^2)} = \pm \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \left( (4 \cdot 10^{-5})^2 - (2 \cdot 10^{-5})^2 \right)} A \approx \pm 0,12 A$$

Αλλά τη στιγμή αυτή ο πυκνωτής εκφορτίζεται και το ρεύμα έχει τη φορά του σχήματος, συνεπώς:

$$i = -0,12 A$$

- ii) Για την τάση του πυκνωτή  $V_{AB} = V_c = \frac{q}{C} = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} V = +1V$

Η τάση του πηνίου  $V_{\Gamma\Delta} = V_L = -1V$ , όπως προκύπτει από τον 2<sup>ο</sup> κανόνα του Kirchhoff.

Η παραπάνω τιμή τάσης, μας δείχνει ότι στο πηνίο αναπτύσσεται ΗΕΔ από αυτεπαγωγή με θετικό πόλο το άκρο Δ. Αλλά τότε με βάση τη φορά διαγραφής  $E_{av\tau} = +1V$ .

- iii) Από τον νόμο της αυτεπαγωγής:

$$E_{av\tau} = -L \frac{di}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{E_{av\tau}}{L} = -\frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} A/s = -250 A/s$$

- iv) Και ερχόμαστε τώρα στην ισχύ.

Σε ποια ισχύ; Με βάση όσα έχουν αναλυθεί στα προηγούμενα έχουμε δυο διαφορετικούς ορισμούς.

Μιλάμε για την ισχύ του ρεύματος (δηλαδή το ρυθμό με τον οποίο το ρεύμα αποδίδει ενέργεια σε κάποιο στοιχείο) ή για την ισχύ με την οποία μια πηγή προσφέρει ενέργεια στο κύκλωμα; Στην περίπτωση μας οι ρόλοι πηγή-αποδέκτης, αλλάζουν περιοδικά.

Ας πάρουμε λοιπόν την πρώτη εκδοχή και ας βρούμε τους ρυθμούς με τους οποίους το ηλεκτρικό ρεύμα μεταφέρει ενέργεια σε κάθε ένα στοιχείο:

$$\text{Για τον πυκνωτή: } P_c = V_c \cdot i = 1V \cdot (-0,12A) = -0,12W$$

$$\text{Για το πηνίο: } P_L = V_L \cdot i = (-1V) \cdot (-0,12A) = 0,12W.$$

Τι σημαίνουν οι παραπάνω τιμές;

Το ηλεκτρικό ρεύμα δεν προσφέρει ενέργεια στον πυκνωτή, αλλά αντίθετα παίρνει ενέργεια από αυτόν  $0,12J/s$ , ή με άλλα λόγια ο πυκνωτής λειτουργεί σαν πηγή δίνοντας ενέργεια στο κύκλωμα, με αποτέλεσμα η ενέργειά του να μεταβάλλεται (μειώνεται) με ρυθμό  $\frac{dU_E}{dt} = -0,12J/s$ .

Αντίθετα το πηνίο απορροφά ενέργεια από το ρεύμα (από το κύκλωμα) με ρυθμό  $0,12J/s$ , με αποτέλεσμα η ενέργειά του να αυξάνεται και ο ρυθμός μεταβολής της να είναι  $\frac{dU_B}{dt} = +0,12J/s$ .

Ας πάρουμε τη δεύτερη εκδοχή για την ενέργεια που κάθε στοιχείο προσφέρει στο κύκλωμα:

Ο πυκνωτής εκφορτίζεται συνεπώς παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα με ρυθμό  $P_c = V_c \cdot |i| = 0,24W$ , αλλά τότε η ενέργεια του ηλεκτρικού του πεδίου μειώνεται κατά  $0,12J/s$  και συνεπώς  $\frac{dU_E}{dt} = -0,12J/s$ .

Το πηνίο ισοδυναμεί με πηγή ΗΕΔ  $E_{\text{απτ}} = 1V$ , συνεπώς ο ρυθμός με τον οποίο **παρέχει** ενέργεια στο κύκλωμα είναι  $P_L = E_{\text{απτ}} \cdot i = 1V \cdot (-0,12A) = -0,12W$ , πράγμα που σημαίνει ότι τελικά δεν παρέχει, αλλά **απορροφά** ενέργεια, με αποτέλεσμα η ενέργεια του μαγνητικού του πεδίου να αυξάνεται και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής του είναι  $\frac{dU_B}{dt} = +0,12J/s$ .

Συμπέρασμα; Και με τους δυο τρόπους μπορούμε να καταλήξουμε στα ίδια ουσιαστικά αποτελέσματα, απλά:

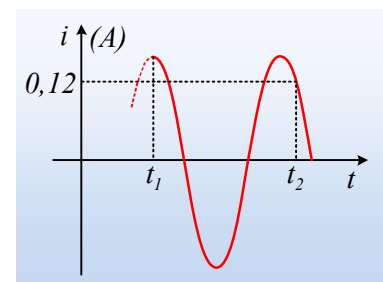
- 1) δεν πρέπει να συγχέουμε τις δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες.
- 2) Αρκεί να μην ζητηθεί απλά μια ισχύς, χωρίς να είναι ξεκάθαρο σε τι αναφέρεται.

Ας μείνουμε λίγο ακόμη στο παραπάνω κύκλωμα.

### Παράδειγμα 12<sup>ο</sup>:

Στο παραπάνω κύκλωμα, πήραμε τη γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο, μετά από κάποια χρονική στιγμή  $t_1$ , λαμβάνοντας το διάγραμμα του διπλανού σχήματος. Για τη χρονική στιγμή  $t_2$  να βρεθούν:

- i) Το φορτίο του πυκνωτή.
- ii) Ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή.



- iii) Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος.
- iv) Οι ρυθμοί μεταβολής της ενέργειας του πυκνωτή και του πηνίου.

**Απάντηση:**

- i) Τη χρονική στιγμή  $t_2$  η ένταση του ρεύματος είναι θετική  $i=0,12A$ , ενώ το πηνίο λειτουργεί ως πηγή, αφού η ενέργεια του μαγνητικού του πεδίου μειώνεται (μειώνεται η ένταση του ρεύματος). Δηλαδή η κατάσταση είναι αυτή που εμφανίζεται στο διπλανό σχήμα. Από τη διατήρηση της ενέργειας προκύπτει (δες προηγούμενο παράδειγμα) ότι  $q=+20\mu C$ .
- ii) Για το ρυθμό μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή έχουμε:

$$\frac{dq}{dt} = i = +0,12C/s$$

Το φορτίο του πυκνωτή αυξάνεται, αφού ο πυκνωτής φορτίζεται.

- iii) Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στο πηνίο με θετικό πόλο το άκρο Δ είναι ίση με:

$$E_{av\tau} = V_{AB} = \frac{q}{C} = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} V = 1V$$

$$\text{Αλλά } E_{av\tau} = -L \frac{di}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{E_{av\tau}}{L} = -\frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} A/s = -250 A/s$$

Ας σημειωθεί ότι ο παραπάνω ρυθμός είναι ίσος με την κλίση τη στιγμή  $t_2$  του διαγράμματος  $i-t$ .

- iv) Με βάση τις ιδέες που αναφέρθηκαν παραπάνω:

$$\frac{dU_E}{dt} = V_{AB}i = +0,12J/s$$

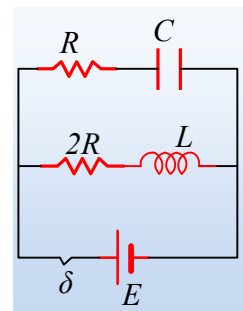
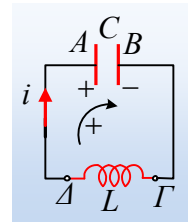
$$\frac{dU_B}{dt} = V_{\Gamma\Delta}i = (-1) \cdot +0,12 = -0,12J/s$$

Και τι συμβαίνει αν στο κύκλωμα περιλαμβάνεται και αντιστάτης;

**Παράδειγμα 13<sup>ο</sup>:**

Στο διπλανό κύκλωμα δίνονται  $E=40V$ ,  $R=2\Omega$ ,  $C=10\mu F$  και το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής  $L=4mH$ . Ο διακόπτης είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Σε μια στιγμή  $t_0=0$ , ανοίγουμε το διακόπτη. Για αμέσως μετά ( $t=0^+$ ) να βρεθούν:

- i) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα και το φορτίο του πυκνωτή.
- ii) Ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή και ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος.
- iii) Οι ρυθμοί μεταβολής της ενέργειας του πυκνωτή και του πηνίου.



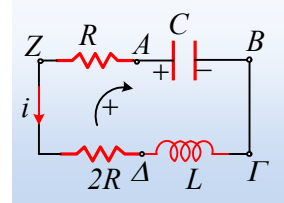


**Απάντηση:**

Με κλειστό το διακόπτη ο κλάδος που έχει τον πυκνωτή δεν διαρρέεται από ρεύμα (στην πραγματικότητα για ελάχιστο χρόνο μόλις κλείσουμε το διακόπτη ο αντιστάτης διαρρέεται από ρεύμα και έτσι μεταφέρονται φορτία στον πυκνωτή με αποτέλεσμα να φορτισθεί σε τάση  $V_c=E=40V$ , αποκτώντας φορτίο  $q=CE=400\mu C$ ), ενώ ο κλάδος του πηνίου διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης (δεν έχουμε πια φαινόμενα αυτεπαγωγής):

$$I = \frac{E}{2R} = 10A.$$

- i) Οπότε ανοίγοντας το διακόπτη  $\delta$ , έχουμε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος, όπου λόγω αυτεπαγωγής το πηνίο θα συνεχίσει να διαρρέεται από ρεύμα, όπως και πριν έντασης 20A. Λαμβάνοντας δε υπόψη μας, όσα αναφέρθηκαν παραπάνω και θεωρώντας θετική την ωρολογιακή φορά διαγραφής του κυκλώματος, θα έχουμε τη στιγμή που ανοίγουμε το διακόπτη  $q=+400\mu C$  και  $i=-10A$ .



- ii) Εφαρμόζοντας το 2<sup>ο</sup> κανόνα του Kirchhoff για τις διαφορές δυναμικού στη διαδρομή ABΓΔZA παίρνουμε:

$$V_{AB} + V_{B\Gamma} + V_{\Gamma\Delta} + V_{\Delta Z} + V_{ZA} = 0 \rightarrow$$

$$40V + 0 + V_{\Gamma\Delta} + iR + i \cdot 2R = 0 \rightarrow$$

$$V_{\Gamma\Delta} = -40V - 3 \cdot (-10A) \cdot 2\Omega = 20V$$

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε μας λέει ότι το πηνίο λειτουργεί ως πηγή με θετικό πόλο της το άκρο  $\Gamma$ , συνεπώς ΗΕΔ  $E = -20V$ . Αλλά:

$$E_{\text{αυτ}} = -L \frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{E_{\text{αυτ}}}{L} = -\frac{-20}{4 \cdot 10^{-3}} A/s = +5.000 A/s$$

- iii) Εξάλλου για τους ζητούμενους ρυθμούς, έχουμε για την ισχύ που παρέχει το ηλεκτρικό ρεύμα σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος:

$$P_c = V_c \cdot i = 40V \cdot (-10A) = -400W, \text{ οπότε}$$

$$\frac{dU_E}{dt} = -400J/s$$

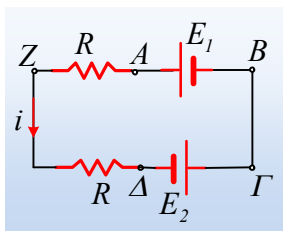
$$P_L = V_L \cdot i = 20V \cdot (-10A) = -200W$$

$$\frac{dU_B}{dt} = -200J/s$$

Πράγμα που σημαίνει ότι και ο πυκνωτής και το πηνίο χάνουν ενέργεια, η οποία μετατρέπεται σε θερμότητα πάνω στους αντιστάτες. Πράγματι:

$$P_Q = i^2 \cdot 3R = 100 \cdot 6W = 600W.$$

Θα μπορούσαμε βέβαια να «δούμε» το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος, στο οποίο υπάρχουν δύο πηγές με ΗΕΔ  $E_1 = V_c = 40V$  και  $E_2 = E_{\text{αυτ}} = 20V$ , όπου η κάθε μια προσφέρει ενέργεια στο κύκλωμα με ρυθμό:



$$P_1 = E_1 |i| = 400W \text{ και}$$

$$P_2 = E_2 |i| = 200W$$

Συνεπώς οι ενέργειες και των δύο πεδίων μειώνονται με ρυθμούς:

$$\frac{dU_E}{dt} = -400J/s \text{ και}$$

$$\frac{dU_B}{dt} = -200J/s$$

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)