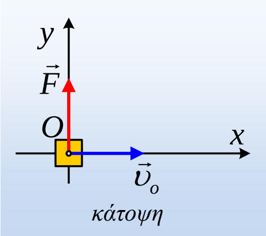
# Κυκλική ή αρχή της επαλληλίας.

Ένα σώμα μάζας 2kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $υ_0$=2m/s, στη διεύθυνση του άξονα x. Σε μια στιγμή ενώ περνά από ένα σημείο Ο, δέχεται την επίδραση μιας δύναμης F για χρονικό διάστημα Δt=2s. Να βρεθεί η θέση και η ταχύτητα του σώματος (μέτρο και κατεύθυνση) τη στιγμή που παύει να ασκείται η δύναμη F, στις εξής περιπτώσεις:




i) Η δύναμη είναι σταθερή, μέτρου F=2N με κατεύθυνση κάθετη στην ταχύτητα $υ_0$.

ii) Η δύναμη είναι σταθερή, μέτρου F=2N και σχηματίζει γωνία θ με την ταχύτητα $υ_0$, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8.

iii) Η δύναμη έχει σταθερό μέτρο F=2N και είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα.

### *Απάντηση:*

i) Με βάση την αρχή της επαλληλίας, το σώμα θα εκτελέσει κίνηση, η οποία μπορεί να θεωρηθεί σύνθετη. Μια ευθύγραμμη ομαλή στην διεύθυνση x με ταχύτητα $υ_0$ και μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη στην διεύθυνση του άξονα y, με επιτάχυνση $\alpha = \frac{F}{m} = \frac{2}{2} m/s^2 = 1m/s^2$.

Αλλά τότε για την κίνηση του σώματος ισχύουν:

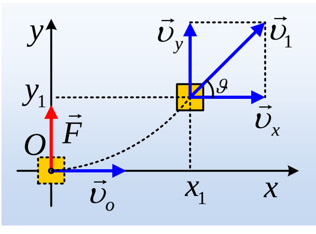
| Άξονας x | Άξονας y |
|---|---|
| $υ_x=υ_o$ (1) | $υ_y=αt$ (3) |
| $x=υ_o t$ (2) | $y=½\, αt^2$ (4) |

Και με αντικατάσταση t=2s παίρνουμε:

$$x_1= υ_o t=2·2m=4m \text{ και } y_1 = ½\, αt^2 = ½\, 1·2^2 m=2m.$$

Ενώ για την ταχύτητα, στη διεύθυνση y παίρνουμε $υ_y=αt=2m/s$.

Αλλά με βάση το διπλανό σχήμα, το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου:




$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} m/s = 2\sqrt{2} m/s$$

Ενώ σχηματίζει με την διεύθυνση x, γωνία θ, όπου $\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = 1$, συνεπώς γωνία θ=45°.

ii) Αναλύοντας την ασκούμενη δύναμη σε δυο συνιστώσες, πάνω στους άξονες x και y παίρνουμε:

$$F_x=F·συνθ=2·0,8N=1,6N \text{ και } F_y=F·ημθ=2·0,6N=1,2N$$

Και με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα για κάθε άξονα:

$$F_x = ma_x \rightarrow a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{1,6}{2} m/s^2 = 0,8 m/s^2 \text{ και}$$

$$F_y = ma_y \to a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{1{,}2}{2} m/s^2 = 0{,}6 m/s^2$$

Αλλά τότε θεωρώντας την κίνηση ως σύνθετη, θα έχουμε για τις επιμέρους κινήσεις στους δυο άξονες:

| Άξονας x | Άξονας y |
|---|---|
| $\upsilon_x = \upsilon_o + \alpha_x t$ (1) | $\upsilon_y = \alpha_y \cdot t$ (3) |
| $x = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\alpha_x t^2$ (2) | $y = \frac{1}{2}\alpha_y \cdot t^2$ (4) |

Αλλά τότε με αντικατάσταση t=2s παίρνουμε:

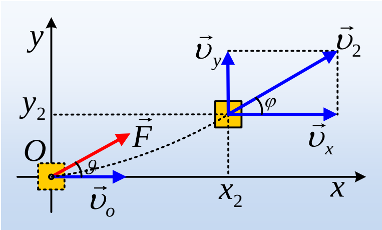
$$x_2 = \upsilon_o t + \tfrac{1}{2}\alpha_x t^2 = 2\cdot 2\text{m} + \tfrac{1}{2}\, 0{,}8\cdot 2^2\text{m} = 5{,}6\text{m} \text{ και}$$

$$y_2 = \tfrac{1}{2}\alpha_y t^2 = \tfrac{1}{2}\, 0{,}6\cdot 2^2\text{m} = 1{,}2\text{m}.$$

Ενώ για τις επιμέρους ταχύτητες έχουμε:

$\upsilon_x = \upsilon_o + \alpha_x t = 2m/s + 0{,}8\cdot 2m/s = 3{,}6m/s$ και

$\upsilon_y = \alpha_y \cdot t = 0{,}6\cdot 2m/s = 1{,}2m/s$




Αλλά με βάση το διπλανό σχήμα, το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου:

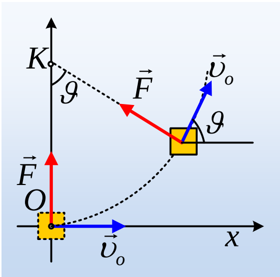
$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{3{,}6^2 + 1{,}2^2}\, m/s \approx 3{,}8 m/s$$

Ενώ σχηματίζει με την διεύθυνση x, γωνία φ, όπου $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{1{,}2}{3{,}6} = \frac{1}{3}$.

iii) Από τη στιγμή που η δύναμη είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα, μπορεί να μεταβάλλει μόνο την διεύθυνση της ταχύτητας, αλλά όχι το μέτρο της. Συνεπώς η κίνηση του σώματος θα είναι ομαλή κυκλική, όπου η δύναμη θα είναι κεντρομόλος δύναμη, για το μέτρο της οποίας ισχύει:

$$F = m\frac{\upsilon_o^2}{R}$$

Αλλά τότε $R = m\frac{\upsilon_o^2}{F} = 2\frac{2^2}{2} m = 4m$, όπου R η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς, πάνω στην οποία θα κινηθεί το σώμα.




Αλλά σε χρονικό διάστημα t=2s το σώμα έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία θ, για την οποία ισχύει:

$$\vartheta = \omega t = \frac{\upsilon_o}{R} t = \frac{2}{4} 2rad = 1rad$$

Κατά συνέπεια το σώμα διαγράφει τμήμα κυκλικής τροχιάς κέντρου K και ακτίνας R=4m, η οποία προφανώς περνά και από την αρχική θέση O και τη στιγμή t=2s έχει διαγράψει τόξο μήκους s=θR=4m. Αλλά τότε στην τελική θέση, το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0$=2m/s, η οποία σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση επίσης γωνία θ, ίση με την επίκεντρη γωνία που υπολογίσαμε (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).

***Σχόλια:***

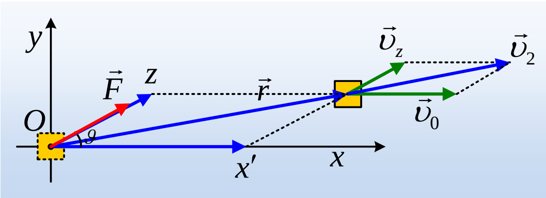
1) Το ii) ερώτημα, θα μπορούσε να απαντηθεί και με βάση την αρχή της επαλληλίας, θεωρώντας ότι το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στη διεύθυνση x και ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη στη διεύθυνση της δύναμης με επιτάχυνση $a = \frac{F}{m} = 1m/s^2$. Αλλά τότε:

| Άξονας x | Διεύθυνση δύναμης |
|---|---|
| $\upsilon'_x=\upsilon_o$ (1) | $\upsilon_z=\alpha\cdot t$ (3) |
| $x'=\upsilon_o t$ (2) | $z=\frac{1}{2}\alpha\cdot t^2$ (4) |

Οπότε για t=2s παίρνουμε:

$$x'=\upsilon_0 t=2\cdot 2m=4m \text{ και } z=\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2^2 m=2m$$

συνεπώς η μετατόπισή του είναι το διάνυσμα $\vec{r}$ .




Αν βέβαια θέλουμε τις συντεταγμένες τη θέσης, στους άξονες x και y θα έχουμε:

$$x = x' + z_x = x' + z\sigma\upsilon\nu\vartheta = 4m + 2\cdot 0{,}8m = 5{,}6m \text{ και}$$

$$y = z\cdot\eta\mu\vartheta = 2\cdot 0{,}6m = 1{,}2m$$

Αλλά και η ταχύτητα $\upsilon_z$=αt=2m/s, όποτε και για την ταχύτητα, στους άξονες θα έχουμε:

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + \upsilon_z\sigma\upsilon\nu\vartheta = 2m/s + 2\cdot 0{,}8m/s = 3{,}6m/s$$

$$\text{Και } \upsilon_y = \upsilon_z\eta\mu\vartheta = 2\cdot 0{,}6m/s = 1{,}2m/s$$

Αλλά τότε

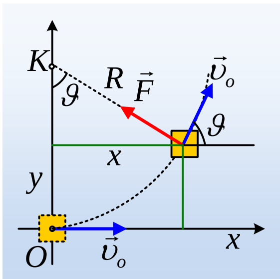
$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{3{,}6^2 + 1{,}2^2}\, m/s \approx 3{,}8m/s$$

Ενώ σχηματίζει με την διεύθυνση x, γωνία φ, όπου $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{1{,}2}{3{,}6} = \frac{1}{3}$.

2) Αν στο iii) ερώτημα θέλαμε να δώσουμε τη θέση του σώματος με τη βοήθεια των συντεταγμένων στους άξονες x και y θα έχουμε:

$$x = R\cdot\eta\mu\vartheta = 4\cdot 0{,}84m = 3{,}36m \text{ και}$$

$$y = R - R\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 4m - 4\cdot 0{,}54m = 1{,}84m$$




**Υλικό Φυσικής-Χημείας**

*Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…*

Επιμέλεια:

***Διονύσης Μάργαρης***