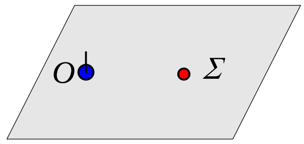
Μια φορτισμένη σφαίρα σε κίνηση.

Ή για να συνδέουμε τα …ασύνδετα!

Ένα πρόβλημα, σαν φύλλο εργασίας, για τους μαθητές της Β΄ Προσανατολισμού, όπου συνδυάζεται η κυκλική κίνηση, με το ηλεκτρικό πεδίο της Γενικής Παιδείας, αλλά και με πολλές ακόμη προεκτάσεις.

///////////////////////////

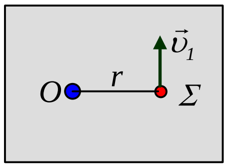


Σε ένα σημείο Ο ενός λείου οριζοντίου επιπέδου είναι στερεωμένη μια μικρή σφαίρα Α με φορτίο Q=2μC. Σε σημείο Σ, σε απόσταση (ΟΣ)= r=3cm συγκρατούμε μια άλλη μικρή σφαίρα Β μάζας m=60g, η οποία φέρει φορτίο q=-0,1μC.

i) Να υπολογίστε την δύναμη που χρειάζεται να ασκούμε στη σφαίρα Β για να ισορροπεί και να την σχεδιάστε στο παραπάνω σχήμα.

ii) Σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη τη σφαίρα Β. Πόση επιτάχυνση θα αποκτήσει αμέσως μετά την απελευθέρωση;

iii) Επαναφέρουμε τη σφαίρα Β στο σημείο Σ και κάποια στιγμή την εκτοξεύουμε οριζόντια με ταχύτητα υ_1=0,5m/s σε διεύθυνση κάθετη στην ΟΣ, όπως στο διπλανό σχήμα.



Κάτοψη

α) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση που θα αποκτήσει αμέσως μετά την εκτόξευση και να την σχεδιάστε στο σχήμα.

β) Η επιτάχυνση αυτή, αμέσως μετά την εκτόξευση, θα μεταβάλει το μέτρο ή την κατεύθυνση της ταχύτητας;

γ) Κάποιος συμμαθητής σας, υποστηρίζει ότι η σφαίρα Β θα εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση με κέντρο το Ο και ακτίνα r=3cm. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;

iv) Να υπολογίστε το μέτρο της αναγκαίας ταχύτητας εκτόξευσης υ_2, ώστε η σφαίρα να κινηθεί κυκλικά γύρω από το Ο.

v) Στην περίπτωση αυτή να υπολογιστεί η ολική ενέργεια της κινούμενης σφαίρας Β.

vi) Καθώς η σφαίρα Β στρέφεται, δέχεται ένα απότομο κτύπημα (σε γλώσσα φυσικής ασκείται πάνω της για ελάχιστο χρονικό διάστημα μια δύναμη ή διαφορετικά συγκρούεται με κάποιο άλλο σώμα), με αποτέλεσμα να αποκτήσει μια ταχύτητα μέτρου υ_3, οπότε παύει να κινείται στην κυκλική τροχιά και απομακρύνεται από τη σφαίρα Α. Όταν η Β βρεθεί τελικά έξω από το ηλεκτρικό πεδίο της σφαίρας Α, μετρήσαμε την ταχύτητά της και την βρήκαμε υ_4=1m/s. Πόση ενέργεια πήρε η Β στη διάρκεια του κτυπήματος;

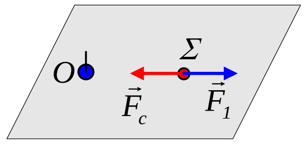
vii) Να υπολογιστεί η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να μεταφερθεί στην Β, για να μπορέσει να απομακρυνθεί από τη σφαίρα Α, η οποία παραμένει πάντα ακλόνητη στο σημείο Ο.

Δίνεται $k_c=9\cdot10^9 N\cdot m^2/C^2$, ενώ οι ακτίνες των σφαιρών θεωρούνται αμελητέες.

Απάντηση:

i) Η σφαίρα Β δέχεται ελκτική δύναμη Coulomb μέτρου:

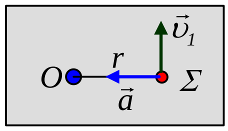
$$F_c = k_c \frac{|Qq|}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-4}} N = 2N$$



Αλλά αφού συγκρατούμε ακίνητη τη σφαίρα, σημαίνει ότι ασκούμε μια αντίθετη δύναμη F_1=2N, όπως στο σχήμα.

ii) Μόλις πάψει να ασκείται η δύναμη F_1 η σφαίρα παύει να ισορροπεί και αποκτά επιτάχυνση στη διεύθυνση της δύναμης F_c, μέτρου:

$$\alpha = \frac{F_c}{m} = \frac{2}{60 \cdot 10^{-3}} m/s^2 = 33{,}3 m/s^2$$

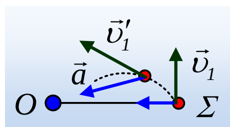


iii) α) Η ασκούμενη δύναμη είναι η ίδια όπως παραπάνω, συνεπώς η σφαίρα θα αποκτήσει επιτάχυνση ξανά, όπως και προηγούμενα, μέτρου 33,3m/s^2 με κατεύθυνση προς το Ο, όπως στο διπλανό σχήμα.

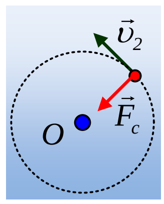
β) Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση στη θέση Σ, είναι κάθετη στην ταχύτητα, συνεπώς αμέσως μόλις εκτοξευθεί η σφαίρα, θα μεταβάλει ΜΟΝΟ τη διεύθυνση της ταχύτητας και όχι το μέτρο της.

γ) Αφού η παραπάνω επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα, παίζει το ρόλο της κεντρομόλου επιτάχυνσης, σε κύκλο ακτίνας R, όπου:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon_1^2}{R} \rightarrow R = \frac{\upsilon_1^2}{\alpha_\kappa} = \frac{0{,}5^2}{33{,}3} m = 7{,}5 \cdot 10^{-3} m = 0{,}75 cm$$



Βλέπουμε ότι η επιτάχυνση αυτή, θα μπορούσε να συγκρατήσει τη σφαίρα σε κυκλική τροχιά πολύ μικρότερης ακτίνας από την απόσταση r, συνεπώς δεν θα εκτελέσει ομαλή κυκλική, αλλά μια άλλη καμπυλόγραμμη κίνηση, αφού την επόμενη χρονική στιγμή, «θα έχει στρίψει πολύ» η σφαίρα και η επιτάχυνση δεν θα είναι πια κάθετη στην ταχύτητα. Έτσι η επιτάχυνση, δεν θα μεταβάλλει μόνο τη διεύθυνση αλλά και το μέτρο της ταχύτητας, επιταχύνοντάς την προς τη σφαίρα Α….



iv) Για να εκτελέσει κυκλική τροχιά η σφαίρα γύρω από το Ο, πρέπει η δύναμη F_c να είναι κεντρομόλος:

$$F_c = m\frac{\upsilon_2^2}{r} \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{F_c r}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{60 \cdot 10^{-3}}} m/s = 1 m/s$$

v) Η σφαίρα Β έχει κινητική ενέργεια (λόγω κίνησης) και δυναμική εξαιτίας του ότι βρίσκεται στο ηλεκτρικό πεδίο της Α σφαίρας:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 + k_c \frac{Qq}{r} \rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} 6 \cdot 10^{-2} 1^2 J + 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot (-0{,}1) \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-2}} J = 0{,}03J - 0{,}06J = -0{,}03J.$$

vi) Μετά το κτύπημα, στη διάρκεια της κίνησης της σφαίρας, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η δύναμη που δέχεται από τη σφαίρα Α, δύναμη συντηρητική, οπότε η ενέργεια διατηρείται. Έτσι θεωρώντας ότι φεύγει σε μεγάλη απόσταση (σε γλώσσα μαθηματικών, φτάνει στο άπειρο) έχοντας ταχύτητα υ_4, θα έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_3^2 + k_c\frac{Qq}{r} = \frac{1}{2}m\upsilon_4^2 + 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_3^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_4^2 - k_c\frac{Qq}{r} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_3^2 = \frac{1}{2}6\cdot 10^{-2}1^2\,J - 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot(-0{,}1)\cdot 10^{-6}}{3\cdot 10^{-2}}\,J = 0{,}03J + 0{,}06J = 0{,}09J$$

Αλλά τότε η ενέργεια που πήρε στη διάρκεια της άσκησης της δύναμης και μέσω του έργου της, είναι:

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = 0{,}09J - 0{,}03J = 0{,}06J$$

Ισοδύναμα:

Η σφαίρα αρχικά έχει ενέργεια Ε, πήρε μέσω του έργου της ασκούμενης δύναμης ενέργεια ΔΕ, συνεπώς η τελική της ενέργεια (στο άπειρο) θα είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} = E + \Delta E \quad (1)\rightarrow$$

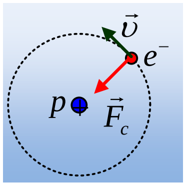
$$\Delta E = \frac{1}{2}m\upsilon_4^2 - E = 0{,}03J - (-0{,}03J) = 0{,}06J$$

vii) Η ελάχιστη απαιτούμενη ενέργεια, ώστε η σφαίρα να μπορέσει να εγκαταλείψει το ηλεκτρικό πεδίο της Α σφαίρας, είναι τόση, ώστε απλά να φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα. Αλλά τότε με βάση την παραπάνω σχέση (1) έχουμε:

$$\Delta E_{min} = \frac{1}{2}m\upsilon_\tau^2 - E = 0J - (-0{,}03J) = 0{,}03J$$

Σχόλιο:

Μετά την παραπάνω ανάλυση, ας δούμε μια εφαρμογή:



Σύμφωνα με μια, όχι και τόσο σύγχρονη άποψη της επιστήμης, το άτομο του υδρογόνου, αποτελείται από ένα ηλεκτρόνιο, το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση, γύρω από ένα πρωτόνιο, το οποίο παραμένει ακίνητο. (θεωρούμε, λέγοντας το παραπάνω, ότι έχουμε ένα ακίνητο άτομο υδρογόνου).

Με βάση την παραπάνω άσκηση μπορείτε να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα;

i) Ποια δύναμη «συγκρατεί» σε κυκλική τροχιά το ηλεκτρόνιο;

ii) Η ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι αρνητική, μηδενική ή θετική;

iii) Ονομάζουμε ενέργεια ιονισμού του υδρογόνου, την ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να δοθεί στο ηλεκτρόνιο, ώστε να απομακρυνθεί από το πρωτόνιο (τον πυρήνα) και έτσι το άτομο να μετατραπεί σε ιόν. Τη μεταβολή αυτή μπορούμε να περιγράψουμε με την αντίδραση:

$$H \rightarrow H^+ + e^-$$

α) Πόση είναι η παραπάνω ενέργεια ιονισμού;

β) Η παραπάνω αντίδραση είναι εξώθερμη ή ενδόθερμη;

iv) Μπορείτε να προτείνετε έναν τρόπο για να προκαλέσουμε τον παραπάνω ιονισμό του ατόμου του υδρογόνου;

Υλικό Φυσικής-Χημείας
Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης