ΦΥΣΙΚΗ Β' Λυκείου

Μάθημα Προσανατολισμού

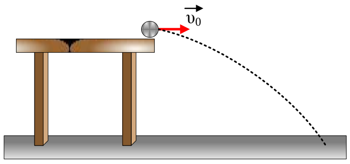
ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ

Κινήσεις

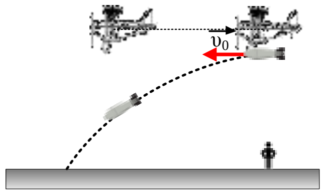
ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ

Οριζόντια βολή είναι η κίνηση που πραγματοποιεί ένα σώμα όταν βάλλεται (εκτοξεύεται) οριζόντια και από μικρό ύψος, με την επίδραση μόνο του βάρους του το οποίο θεωρείται σταθερό.

Παραδείγματα οριζόντιας βολής
Η κίνηση που βλέπουμε να πραγματοποιεί το αντικείμενο στο διπλανό σχήμα όταν του προσδώσουμε κάποια οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$.



Οριζόντια βολή έχουμε και στην περίπτωση που ένα μαχητικό αεροπλάνο το οποίο κινείται οριζόντια πάνω ελευθερώνει μια βόμβα.
Ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο έδαφος, βλέπει τη βόμβα να κινείται διαγράφοντας την τροχιά του σχήματος:



Η **οριζόντια βολή** είναι μία **σύνθετη κίνηση** που αποτελείται από δύο απλές κινήσεις, μία κατακόρυφη που είναι ελεύθερη πτώση και μία οριζόντια που είναι ευθύγραμμη ομαλή.

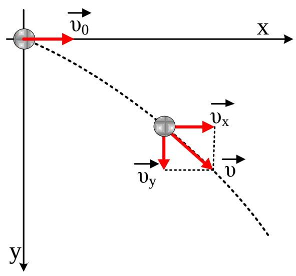
Κάθε σύνθετη κίνηση, δηλαδή κάθε κίνηση η οποία αποτελείται από δύο ή περισσότερες απλές κινήσεις, **περιγράφεται** σύμφωνα **με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων** (ή αρχή της επαλληλίας):

1. Ένα σώμα που πραγματοποιεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες απλές κινήσεις, τις πραγματοποιεί ανεξάρτητα τη μία από την άλλη.
2. Η θέση του σώματος μετά από χρόνο t, είναι η ίδια είτε οι κινήσεις πραγματοποιούνται ταυτόχρονα, είτε πραγματοποιούνται διαδοχικά σε χρόνο t η κάθε μία.

Για τον υπολογισμό της ταχύτητας και της μετατόπισης, μετά από χρόνο t, γράφουμε το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων ή των μετατοπίσεων αντίστοιχα, που θα είχε το κινητό, αν εκτελούσε κάθε μία κίνηση ανεξάρτητα και επί χρόνο t.
Δηλαδή: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$ και $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$

Μελέτη οριζόντιας βολής

Έστω ότι ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται από μικρό ύψος h πάνω από το έδαφος, με οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$.
Για την περιγραφή της κίνησης ακολουθούμε την εξής διαδικασία:
α. Επιλέγουμε ένα σύστημα αξόνων που έχει ως αρχή (σημείο Ο) το σημείο εκτόξευσης του σώματος:
β. Σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων αναλύουμε την σύνθετη κίνηση σε δύο επιμέρους κινήσεις, που πραγματοποιούνται ταυτόχρονα στους δύο ημιάξονες Οx και Οy.



Ημιάξονας Οx:

Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα κατά την οριζόντια διεύθυνση, παρατηρώντας ότι στη διεύθυνση αυτή το σώμα δε δέχεται καμία δύναμη.
Επειδή το σώμα κατά την οριζόντια διεύθυνση έχει **αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$** συμπεραίνουμε ότι πραγματοποιεί **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση**.
Οριζόντια διεύθυνση (ευθύγραμμη ομαλή κίνηση):
α. Εξίσωση ταχύτητας - χρόνου

Η ταχύτητα στην οριζόντια διεύθυνση είναι σταθερή, συνεπώς έχει μέτρο: $\boldsymbol{\upsilon_x = \upsilon_o}$

β. Εξίσωση θέσης - χρόνου

Θεωρώντας $t_0 = 0$ τη χρονική στιγμή της εκτόξευσης το διάστημα που διανύει είναι: $\mathbf{x = \upsilon_o t}$

Ημιάξονας Oy:

Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, παρατηρώντας ότι στη διεύθυνση αυτή **το σώμα δέχεται ως μοναδική δύναμη το βάρος του** $\vec{w}$:

$$\Sigma\vec{F}_y = m\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{w} = m\vec{\alpha} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{g}$$

Επειδή το σώμα **κατά την κατακόρυφη διεύθυνση δεν έχει αρχική ταχύτητα** και **κινείται με σταθερή επιτάχυνση ίση με** $\vec{g}$, συμπεραίνουμε ότι **πραγματοποιεί ελεύθερη πτώση.**

Κατακόρυφη διεύθυνση (ελεύθερη πτώση):

α. Εξίσωση ταχύτητας- χρόνου

Επειδή η κίνηση στην κατακόρυφη διεύθυνση είναι ελεύθερη πτώση: $\boldsymbol{\upsilon_y = g \cdot t}$

β. Εξίσωση θέσης - χρόνου

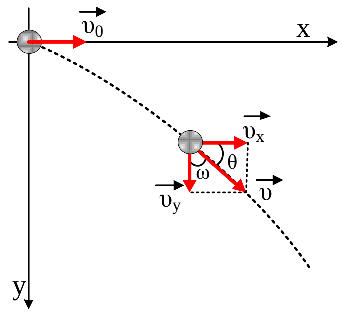
Θεωρώντας $t_0 = 0$ τη χρονική στιγμή της εκτόξευσης: $\mathbf{y = \dfrac{1}{2} g \cdot t^2}$

Η θέση και η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή

Η πλήρης περιγραφή της κίνησης γίνεται αν κάθε χρονική στιγμή μετά την εκτόξευση του σώματος (και ενώ το σώμα δεν έχει φτάσει στο έδαφος), γνωρίζουμε την ταχύτητα και τη θέση του.

1. Προσδιορισμός ταχύτητας

Σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς του σώματος το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ είναι εφαπτόμενο στην τροχιά, ενώ το μέτρο της προσδιορίζεται ως εξής:



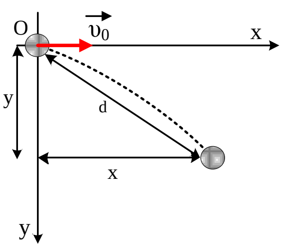
$$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \xrightarrow[\upsilon_y = g\cdot t]{\upsilon_x = \upsilon_o} \boldsymbol{\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + (g \cdot t)^2}}$$

Η κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ προσδιορίζεται από τον υπολογισμό της εφαπτομένης μίας εκ των δύο γωνιών θ και ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ με την οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση αντίστοιχα (συνηθίζεται να δίνεται η γωνία με την οριζόντια διεύθυνση δηλαδή τη θ στο σχήμα μας):

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_o} = \frac{g \cdot t}{\upsilon_o}}$$

2. Προσδιορισμός θέσης

Κάθε χρονική στιγμή t γνωρίζουμε τη θέση του σώματος σε κάθε διεύθυνση:



Οριζόντια διεύθυνση: $x = \upsilon_o t$

Κατακόρυφη διεύθυνση: $y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Η απόσταση του σώματος d από τη θέση εκτόξευσης (σημείο Ο) υπολογίζεται ως εξής:

$$d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \mathbf{d = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη στην οριζόντια βολή

α. Συνολικός χρόνος κίνησης ($t_{ολ}$):

Τη χρονική στιγμή $t = t_{ολ}$ που το σώμα φτάνει στο έδαφος, στην κατακόρυφη διεύθυνση βρίσκεται στη θέση $y = h$, συνεπώς: $y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \xRightarrow[t=t_{ολ}]{y=h} h = \frac{1}{2} g \cdot t_{ολ}^2 \Rightarrow \mathbf{t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$

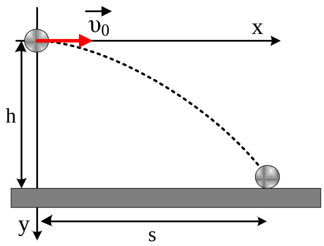
☞ Ο χρόνος $t_{ολ}$ είναι ο συνολικός χρόνος της σύνθετης της κίνησης **αλλά και ο χρόνος που διαρκεί κάθε μία από τις επιμέρους κινήσεις**.

β. Βεληνεκές (s):

Βεληνεκές ονομάζεται η μέγιστη απόσταση που διανύει το σώμα στην οριζόντια διεύθυνση.

Τη χρονική στιγμή $t = t_{ολ}$ που το σώμα φτάνει στο έδαφος, **στην οριζόντια διεύθυνση βρίσκεται στη θέση x = s**, συνεπώς:

$$x = \upsilon_o t \xRightarrow[t=t_{ολ}]{x=s} s = \upsilon_o t_{ολ} \Rightarrow \mathbf{s = \upsilon_o \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$



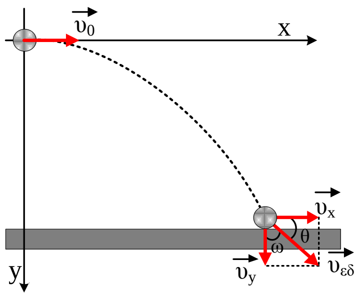
γ. Ταχύτητα σώματος στο έδαφος ($\upsilon_{εδ}$):

Η ταχύτητα του σώματος κάθε χρονική στιγμή είναι $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y$ και έχει μέτρο

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + (g \cdot t)^2}$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_{ολ}$ το σώμα φτάνει στο έδαφος, συνεπώς:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + (g \cdot t)^2} \Rightarrow \upsilon_{εδ} = \sqrt{\upsilon_o^2 + g^2 \frac{2h}{g}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{εδ} = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2gh}}$$



Η κατεύθυνση της ταχύτητας $\upsilon_{εδ}$ προσδιορίζεται από τον υπολογισμό της εφαπτομένης μίας εκ των δύο γωνιών θ και ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\upsilon_{εδ}$ με την οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση αντίστοιχα:

$$\boldsymbol{εφθ = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_o} = \frac{g \cdot t_{ολ}}{\upsilon_o}}$$

δ. Απόσταση σώματος από τη θέση εκτόξευσης τη χρονική στιγμή που φτάνει στο έδαφος ($d_{ολ}$).

$$d_{ολ}^2 = S^2 + h^2 \Rightarrow \mathbf{d_{ολ} = \sqrt{S^2 + h^2}}$$

ε. Εξίσωση τροχιάς

Οι εξισώσεις που προσδιορίζουν κάθε χρονική στιγμή τη θέση ενός σώματος, το οποίο πραγματοποιεί οριζόντια βολή είναι:

$x = \upsilon_o t$ (1) και $y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (2). Λύνουμε τη σχέση (1) ως προς t: $t = \frac{x}{\upsilon_o}$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (2) έχουμε:

$$\mathbf{y = \frac{g}{2\upsilon_o^2} \cdot x^2}$$

Η τελευταία εξίσωση ονομάζεται εξίσωση τροχιάς και συνδέει κάθε χρονική στιγμή τις συντεταγμένες θέσης του σώματος στους δύο ημιάξονες Ox και Oy.

Η εξίσωση $y = \frac{g}{2\upsilon_o^2} \cdot x^2$ είναι της μορφής $y = \alpha \cdot x^2$, δηλαδή είναι **εξίσωση παραβολής**. Αυτό σημαίνει πως **η οριζόντια βολή είναι μια κίνηση που πραγματοποιείται σε παραβολική τροχιά**.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Εφαρμογή των τύπων της οριζόντιας βολής.

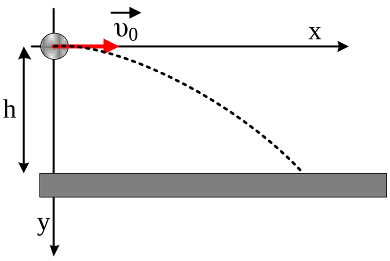
Για να λύσουμε μία άσκηση που αναφέρεται στην οριζόντια βολή ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Επιλέγουμε κατάλληλο σύστημα αξόνων Ox και Oy.

2. Αναλύουμε την συνολική κίνηση σε επιμέρους κινήσεις που πραγματοποιούνται στους άξονες Ox και Oy, γράφοντας τις κατάλληλες εξισώσεις που ισχύουν σε κάθε άξονα.

3. Εφαρμόζουμε την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων σύμφωνα με την οποία ο χρόνος που διαρκεί η κίνηση σε κάθε άξονα είναι ίδιος με αυτόν που διαρκεί η συνολική κίνηση.

Παράδειγμα 1. Το μικρό σώμα του διπλανού σχήματος εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή t = 0 από σημείο O που βρίσκεται σε ύψος h = 20 m πάνω από το έδαφος με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0 = 5 m/s και εκτελεί οριζόντια βολή.



α. Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης του σώματος στον οριζόντιο άξονα x′Ox και στον κατακόρυφο άξονα y′Oy.

β. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που το μικρό σώμα φτάνει στο έδαφος.

γ. Να βρείτε το βεληνεκές της οριζόντιας βολής, δηλαδή την οριζόντια απόσταση που διανύει το σώμα μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Λύση

α. Σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, όταν ένα κινητό εκτελεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες κινήσεις, καθεμία από αυτές εκτελείται εντελώς ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Όταν το σώμα εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα υ_0, στον άξονα x′Ox δε δέχεται κάποια δύναμη, οπότε εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Την t = 0 είναι x = 0.

Συνεπώς η εξίσωση κίνησης στον άξονα αυτό είναι: $x = \upsilon_0 t \Rightarrow \mathbf{x = 5t}$ **(S.I.)**

Στον κατακόρυφο άξονα y'Oy το σώμα δέχεται το βάρος του και εκτελεί ελεύθερη πτώση.

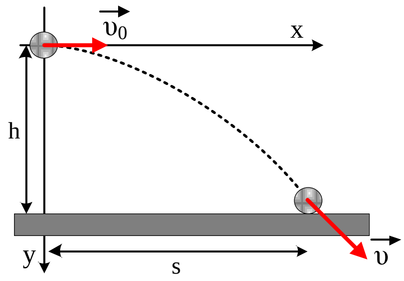
Την t = 0 είναι y = 0.

Άρα η εξίσωση κίνησης είναι: $y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \mathbf{y = 5t^2}$ **(S.I.)**

β. Στον κατακόρυφο άξονα η εξίσωση κίνησης είναι η $y = 5t^2$. Αν θέσουμε στον τύπο αυτό όπου y = h, θα βρούμε τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα φτάνει στο έδαφος. Είναι: $20 = 5t_1^2 \Rightarrow \mathbf{t_1 = 2s}$.

γ. Στον οριζόντιο άξονα η εξίσωση κίνησης είναι η $x = \upsilon_0 t$. Αν θέσουμε στον τύπο αυτό όπου $t = t_1$, θα βρούμε τη θέση στην οποία βρίσκεται το σώμα στον οριζόντιο άξονα τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος. Η θέση αυτή ισούται με την οριζόντια απόσταση s_1 που διένυσε το σώμα μέχρι να φτάσει στο έδαφος (και ονομάζεται βεληνεκές της βολής). Είναι: $s_1 = \upsilon_0 t_1 \Rightarrow s_1 = 5\cdot 2 \Rightarrow \mathbf{s_1 = 10\,m}$

Παράδειγμα 2. Σιδερένια μπίλια εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή t = 0 από ύψος h = 180 m πάνω από το έδαφος με οριζόντια ταχύτητα υ_0 και φτάνει στο έδαφος έχοντας ταχύτητα μέτρου υ = 100 m/s. Να υπολογίσετε:



α. το μέτρο της ταχύτητας της μπίλιας στον κατακόρυφο άξονα τη χρονική στιγμή που φτάνει στο έδαφος,

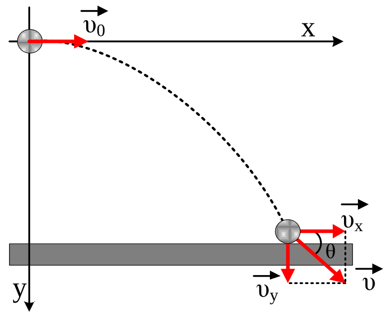
β. το μέτρο της αρχικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$,

γ. το ύψος πάνω από το έδαφος όπου η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2. Οι αντιστάσεις είναι αμελητέες.

Λύση

α. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{\upsilon}_x$ και $\vec{\upsilon}_y$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στον άξονα x'Ox η μπίλια εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Άρα: $\upsilon_x = \upsilon_0$



Στον άξονα y'Oy η μπίλια εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Άρα $\upsilon_y = g t_{ολ}$. Έχουμε για τον άξονα y'Oy:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt_{ολ}^2 \Rightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \mathbf{t_{ολ} = 6\,s}.$$

Συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας της μπίλιας στον κατακόρυφο άξονα τη χρονική στιγμή που φτάνει στο έδαφος ισούται με: $\upsilon_y = g t_{ολ} \Rightarrow \upsilon_y = 10\cdot 6 \Rightarrow \mathbf{\upsilon_y = 60\ m/s}$

β. Η ταχύτητα υ_2 έχει αναλυθεί στις συνιστώσες υ_{2x} και υ_{2y} που είναι κάθετες μεταξύ τους. Συνεπώς:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 \Rightarrow \upsilon_x^2 = \upsilon^2 - \upsilon_y^2 \Rightarrow \upsilon_x^2 = 1000 - 3600 \Rightarrow \upsilon_x^2 = 6400 \Rightarrow \mathbf{\upsilon_x = 80\,\frac{m}{s}}$$

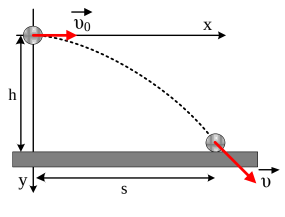
Όμως $\upsilon_x = \upsilon_0$. Συνεπώς: $\mathbf{\upsilon_0 = 30\ m/s}$

γ. Εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας από το σημείο εκτόξευσης μέχρι την στιγμή που η κινητική ενέργεια γίνεται τριπλάσια της βαρυτικής ενέργειας.

$$E_{μηχ}^{αρχ} = E_{μηχ}^{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = 3U_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgH = 4mgh \Rightarrow \frac{\upsilon_0^2}{8g} + \frac{H}{4} = h$$

$$\Rightarrow h = \frac{6400}{80} + \frac{180}{4} \Rightarrow \mathbf{h = 125\,m}$$

Παράδειγμα 3. Από ύψος h πάνω από το έδαφος εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή t = 0 σημειακό αντικείμενο με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0 = 15 m/s και τη χρονική στιγμή t_1 φτάνει στο έδαφος έχοντας υποστεί οριζόντια μετατόπιση μέτρου s_1 = 75 m (βεληνεκές της βολής).



α. Να υπολογίσετε το ύψος h.

β. Να γράψετε την εξίσωση y = f(x) (εξίσωση τροχιάς).

γ. Να βρείτε την απόσταση του σημειακού αντικειμένου από το σημείο εκτόξευσης τη χρονική στιγμή t_2 = 4s.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2. Θεωρήστε αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

Λύση

α. Για τον οριζόντιο άξονα x'Ox ισχύει: $x = \upsilon_0 t$

Τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση s_1. Συνεπώς:

$s_1 = \upsilon_o t_1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{s_1}{\upsilon_o} \Rightarrow \mathbf{t_1 = 5s}$

Για τον κατακόρυφο άξονα y'Oy ισχύει: $y = \dfrac{1}{2}gt^2$

Τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα φτάνει στο έδαφος έχει κινηθεί κατακόρυφα κατά h. Συνεπώς:

$h = \dfrac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow h = \dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 5^2 \Rightarrow \mathbf{h = 125\,m}$

β. Η εξίσωση κίνησης στον οριζόντιο άξονα x'Ox είναι: $x = \upsilon_o t$

Η εξίσωση κίνησης στον κατακόρυφο άξονα y'Oy είναι: $y = \dfrac{1}{2}gt^2$

Λύνουμε ως προς t την εξίσωση x = f(t): $x = \upsilon_o t \Rightarrow t = \dfrac{x}{\upsilon_o}$

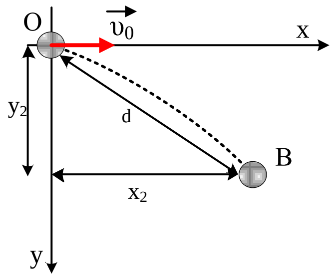
και την αντικαθιστούμε στην εξίσωση y = f(t). Δηλαδή:

$y = \dfrac{1}{2}g\cdot\left(\dfrac{x}{\upsilon_o}\right)^2 \Rightarrow y = \dfrac{g}{2\upsilon_o^2}\cdot x^2 \Rightarrow y = \dfrac{10}{2\cdot 15^2}\cdot x^2 \Rightarrow \mathbf{y = \dfrac{1}{45}\cdot x^2 (S.I.)}$ για $0 \le x \le 75\,m$

γ. Τη χρονική στιγμή t_2 το σημειακό αντικείμενο έχει διανύσει στον οριζόντιο άξονα διάστημα x_2 και στον κατακόρυφο άξονα διάστημα y_2. Είναι:

$x_2 = \upsilon_o t_2 \Rightarrow x_2 = 15\cdot 4 \Rightarrow \mathbf{x_2 = 60\,m}$

και $y_2 = \dfrac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow y_2 = \dfrac{1}{2}10\cdot 16 \Rightarrow \mathbf{y_2 = 80\,m}$



Η ζητούμενη απόσταση είναι η απόσταση (OB) = d. Έχουμε από το τρίγωνο:

$d = \sqrt{y_2^2 + x_2^2} \Rightarrow d = \sqrt{80^2 + 60^2} \Rightarrow d = \sqrt{10000} \Rightarrow \mathbf{d = 100\,m}$.

Όταν είναι γνωστή η εξίσωση της τροχιάς

Η εξίσωση της τροχιάς ενός σώματος που κάνει οριζόντια βολή είναι $y = \dfrac{x^2}{20}$ (S.I.)

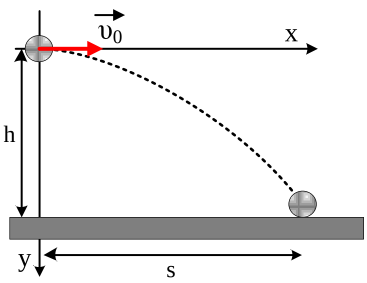
α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση y = f(x).

β. Να βρείτε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του σώματος.

γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος την στιγμή που φτάνει στο έδαφος, αν είναι γνωστό ότι την στιγμή που το σώμα ακουμπά στο έδαφος η οριζόντια μετατόπιση και η κατακόρυφη μετατόπιση έχουν ίσα μέτρα. Δίνεται: $g = 10\ m/s^2$.

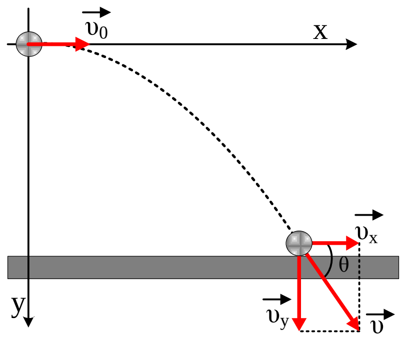
Λύση

α. Η εξίσωση $y = \dfrac{x^2}{20}$ παριστάνει μία παραβολή, άρα η γραφική της παράσταση θα είναι όπως στο διπλανό σχήμα.



β. Η εξίσωση $y = \dfrac{x^2}{20}$ όπως έχουμε δει στην θεωρία λέγεται εξίσωση τροχιάς. Η θεωρητική της μορφή $y = \dfrac{g}{2\upsilon_0^2}x^2$ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύγκριση γιατί χρειάζεται απόδειξη, έτσι έχουμε την επιλογή της απόδειξης ή να κάνουμε απευθείας αντικατάσταση των εξισώσεων y = f(t) και x = f(t) στην δοθείσα εξίσωση. Θα εφαρμόσουμε το δεύτερο και έχουμε:

$$y = \frac{x^2}{20} \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 = \frac{(\upsilon_0 t)^2}{20} \Rightarrow 5t^2 = \frac{\upsilon_0^2 t^2}{20} \Rightarrow 5 = \frac{\upsilon_0^2}{20} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_0 = 10\frac{m}{s}}.$$



γ. Όταν το σώμα φτάσει στο έδαφος σύμφωνα με την εκφώνηση ισχύει:

$$y = x \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 = \upsilon_0 t \Rightarrow \frac{1}{2}gt = \upsilon_0 \Rightarrow t = \frac{2\upsilon_0}{g} \Rightarrow \mathbf{t = 2s}.$$

Άρα την στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος έχουμε: $\upsilon_y = gt \Rightarrow \mathbf{\upsilon_y = 20\ m/s}$ και $\upsilon_x = \upsilon_0 = 10$ m/s.

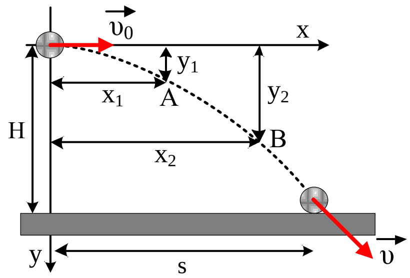
Οπότε τελικά: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{100+400}\,\frac{m}{s} \Rightarrow \mathbf{\upsilon = 10\sqrt{5}\frac{m}{s}}$ η οποία σχηματίζει γωνία με την οριζόντια συνιστώσα $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{20}{10} \Rightarrow \mathbf{\varepsilon\varphi\theta = 2}$.

Όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες σε διάφορες χρονικές στιγμές

Παράδειγμα 4. Σώμα εκτοξεύεται από ύψος H με οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$. Την χρονική στιγμή t_1 το σώμα περνά από το σημείο A και έχει μετατοπιστεί κατά x_1 = 40 m και την χρονική στιγμή t_2 το σώμα περνά από τη θέση B και έχει μετατοπιστεί κατά x_2 = 60 m. Τις ίδιες χρονικές στιγμές το σώμα έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά y_1 και y_2 αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύει $\Delta y = y_2 - y_1 = 100$ m. Το σώμα φτάνει στο έδαφος 2 s μετά την στιγμή που περνά από το σημείο B. Να βρείτε:

α. Το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης

β. το αρχικό ύψος που έγινε η εκτόξευση και το βεληνεκές της βολής.



Λύση

α. Για το σημείο A ισχύει: $x_1 = \upsilon_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{x_1}{\upsilon_0} \Rightarrow t_1 = \frac{40}{\upsilon_0}$ (1) και $y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow y_1 = 5t_1^2$ (S.I.)

Για το σημείο B έχουμε: $x_2 = \upsilon_0 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{x_2}{\upsilon_0} \Rightarrow t_2 = \frac{60}{\upsilon_0}$ (2) και $y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow y_2 = 5t_2^2$ (S.I.)

Για την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων A και B έχουμε:

$$\Delta y = y_2 - y_1 \Rightarrow 100 = 5t_1^2 - 5t_2^2 \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} 100 = 5\left(\frac{3600}{\upsilon_0^2} - \frac{1600}{\upsilon_0^2}\right) \Rightarrow 20 = \frac{2000}{\upsilon_0^2} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_0 = 10\frac{m}{s}}$$

β. Από την (2) έχουμε t_2 = 6 s. Άρα το σώμα φτάνει στο έδαφος την χρονική στιγμή $t_3 = t_2 + 2\ s \Rightarrow \mathbf{t_3 = 8\ s}$.

Το βεληνεκές της βολής είναι: $s = \upsilon_0 t_3 \Rightarrow \mathbf{s = 80\ m}$ και το ύψος από το οποίο έγινε η βολή είναι:

$$H = \frac{1}{2}gt_3^2 \Rightarrow \mathbf{H = 320\,m}.$$

Συνάντηση σωμάτων όταν το ένα από τα δύο εκτελεί οριζόντια βολή.

Για την λύση τέτοιου είδους προβλημάτων ακολουθούμε τα εξής βήματα

1. Κάνουμε το κατάλληλο σχήμα τοποθετώντας τα σώματα στην αρχική τους θέση και στην θέση της συνάντησης.

2. Εφόσον τα δύο σώματα ξεκινούν ταυτόχρονα τότε ο χρόνος είναι κοινός και για τα δύο σώματα ως την στιγμή της συνάντησης.

3. Γράφουμε τις εξισώσεις που ισχύουν για κάθε είδους κίνηση.

Οριζόντια βολή και ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

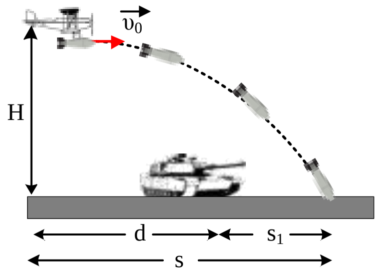
Παράδειγμα 5. Βομβαρδιστικό αεροπλάνο κινείται σε οριζόντια κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 200$ m/s και σε ύψος H = 500 m από το έδαφος. Ξαφνικά αφήνει βόμβα να πέσει για να κτυπήσει τανκ που κινείται στο έδαφος με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 10$ m/s. Αν δεν υπάρχουν αντιστάσεις και δίνεται ότι $g = 10$ m/s^2, να βρεθεί η οριζόντια απόσταση αεροπλάνου – τανκ τη στιγμή που αφήνεται η βόμβα, ώστε αυτή να κτυπήσει το τανκ στην περίπτωση που το τανκ κινείται:

α. ομόρροπα με το αεροπλάνο. **β.** αντίρροπα με το αεροπλάνο.

Θεωρήστε αμελητέες τις διαστάσεις του τανκ.

Λύση

Η βόμβα για να τα φτάσει στο έδαφος και να κτυπήσει το τανκ πρέπει να περάσει χρόνος που θα δοθεί από τη σχέση: $y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2}gt_{ολ}^2 \Rightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow \mathbf{t_{ολ} = 10s}$

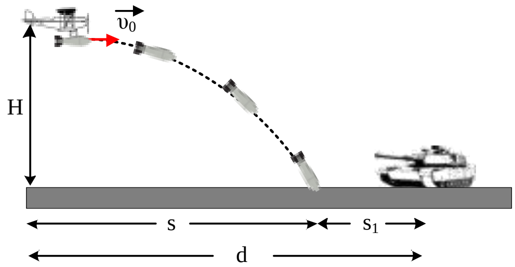


Η βόμβα θα κινηθεί με την ταχύτητα που είχε όταν ήταν ακόμη προσαρτημένη στο αεροπλάνο.

Το βεληνεκές της βόμβας είναι $s = \upsilon_0 t_{ολ} \Rightarrow \mathbf{s = 2000\,m}$

Ανεξάρτητα από την κατεύθυνση κίνησης του τανκ εφόσον κινείται ευθύγραμμα και ομαλά θα διανύσει απόσταση $s_1 = \upsilon_1 t_{ολ} \Rightarrow \mathbf{s_1 = 100\,m}$

α. Αν το τανκ κινείται ομόρροπα με το αεροπλάνο τότε σύμφωνα με το σχήμα η αρχική απόσταση που θα πρέπει να έχει το αεροπλάνο από το τανκ ώστε να το πετύχει με την βόμβα είναι όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα $d = s - s_1 \Rightarrow d = (2000 - 100)m \Rightarrow \mathbf{d = 1900\,m}$



β. Για την περίπτωση της αντίρροπης κίνηση όπως φαίνεται στο σχήμα θα ισχύει

$d = s + s_1 \Rightarrow d = (2000 + 100)m \Rightarrow \mathbf{d = 2100\,m}$.

Οριζόντια βολή και ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κάθετη στην αρχική ταχύτητα του σώματος που πραγματοποιεί οριζόντια βολή.

Παράδειγμα 6. Το μπαλόνι του διπλανού σχήματος αφήνεται από το έδαφος έτσι ώστε να ανέρχεται με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ = 2 m/s. Την ίδια στιγμή και από οριζόντια απόσταση d = 60 m από το σημείο που αφήνουμε το μπαλόνι εκτοξεύουμε σώμα Σ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 20$ m/s. Αν είναι γνωστό ότι το σώμα πετυχαίνει το μπαλόνι να υπολογίσετε:

α. την κατακόρυφη απόσταση που διάνυσε το μπαλόνι μέχρι να συγκρουστεί με το σώμα

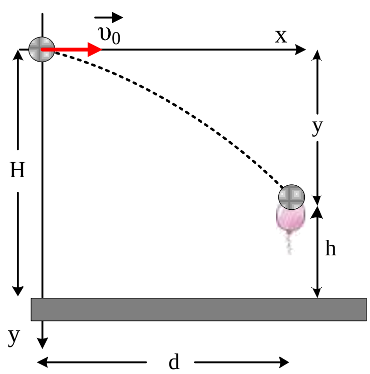
β. το ύψος H του σημείου βολής του σώματος Σ από το έδαφος.

Δίνεται: g=10m/s^2 και οι διαστάσεις των δύο αντικειμένων θεωρούνται αμελητέες.

Λύση

α. Για να πετύχει το σώμα Σ το μπαλόνι θα πρέπει να βρεθεί στην ίδια κατακόρυφο με το μπαλόνι και αυτό θα συμβεί αφού διανύσει την απόσταση d.

Άρα $d = \upsilon_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{\upsilon_0} \Rightarrow \mathbf{t_1 = 3s}$



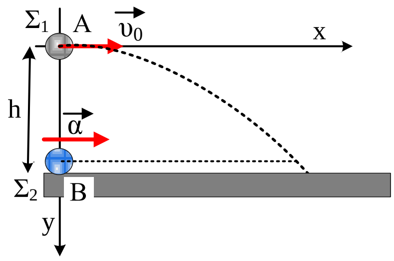
Στον ίδιο χρόνο το μπαλόνι έχει διανύσει κατακόρυφα απόσταση $h = \upsilon t_1 \Rightarrow \mathbf{h = 6\,m}$.

β. Ώσπου το σώμα Σ να χτυπήσει το μπαλόνι έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση y που θα δοθεί από τη σχέση: $y = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow \mathbf{y = 45\,m}$.

Άρα το ύψος πάνω από το έδαφος που πραγματοποιήθηκε η οριζόντια βολή όπως φαίνεται και στο σχήμα είναι: $H = y + h \Rightarrow \mathbf{H = 51m}$.

Οριζόντια βολή και επιτάχυνση

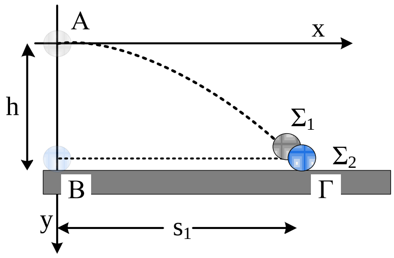
Παράδειγμα 7. Μικρό σώμα $Σ_1$ εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή t = 0 με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $υ_o$ = 5 m/s από σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος h = 20 m πάνω από το έδαφος. Την ίδια χρονική στιγμή t = 0 μικρό σώμα $Σ_2$ ξεκινά από την ηρεμία και κινείται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση $\vec{α}$ από σημείο Β του εδάφους που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη με το σημείο Α. Τα δύο σώματα φτάνουν ταυτόχρονα σε σημείο Γ του εδάφους. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{α}$.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.



Λύση

Το σώμα $Σ_1$ εκτελεί οριζόντια βολή και φτάνει στο σημείο Γ του εδάφους τη χρονική στιγμή t_1. Έχουμε:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \mathbf{t_1 = 2s}$$



Στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$ το σώμα $Σ_1$ έχει διανύσει στην οριζόντια διεύθυνση διάστημα s_1 = (ΒΓ). Έχουμε: $x = υ_o t \Rightarrow s_1 = υ_o t_1 \Rightarrow \mathbf{s_1 = 10\ m}$

Στην ίδια χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$ το σώμα $Σ_2$ έχει διανύσει την ίδια απόσταση s_1 = (ΒΓ) με σταθερή επιτάχυνση $\vec{α}$ έχοντας ξεκινήσει από την ηρεμία. Συνεπώς για το σώμα $Σ_2$ ισχύει:

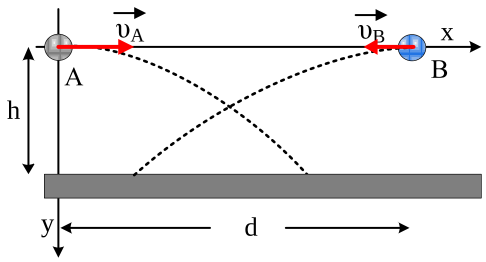
$$s = \frac{1}{2}α \cdot Δt^2 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2}αt_1^2 \Rightarrow α = \frac{2s_1}{t_1^2} \Rightarrow \mathbf{α = 5\ \frac{m}{s^2}}$$

Συνάντηση με τα δύο σώματα να εκτελούν οριζόντια βολή.

Παράδειγμα 8. Από τα σημεία Α, Β που βρίσκονται στο ίδιο ύψος h = 180 m και απέχουν μεταξύ τους d = 120 m ρίχνονται τη χρονική στιγμή t_0 = 0, δύο σώματα με αντίρροπες οριζόντιες ταχύτητες που έχουν αντίστοιχα μέτρα $υ_A$ = 20 m/s και $υ_B$ = 10 m/s.

α. Να αποδείξετε ότι τα σώματα σίγουρα θα συναντηθούν και να βρεθεί η χρονική στιγμή της συνάντησής τους.

β. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου συνάντησης αν θεωρήσουμε θετική την φορά προς τα δεξιά και προς τα κάτω και η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο σημείο Α. Δίνεται: g = 10 m/s^2.

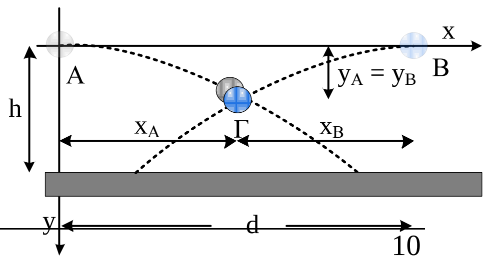


Λύση

α. Ο χρόνος που θα χρειαστεί για να φτάσει κάθε σώμα στο έδαφος στην περίπτωση που δεν συγκρουστούν δίνεται από την σχέση: $y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \mathbf{t_1 = 6s}$.

Τα δύο σώματα εκτελούν οριζόντια βολή από το ίδιο ύψος η εξίσωση κίνησης τους για τον κατακόρυφο άξονα θα είναι κοινή και για τα δύο σώματα.

$$y_A = y_B = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \mathbf{y_A = y_B = 5t^2\ (S.I.)}.$$



Άρα κάθε χρονική στιγμή τα δύο σώματα βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, οπότε για να συναντηθούν αρκεί να έχουν την ίδια οριζόντια συντεταγμένη την ίδια χρονική στιγμή. Οι εξισώσει κίνησης των σωμάτων είναι αντίστοιχα:

$$x_A = x_{0,A} + \upsilon_A t \Rightarrow x_A = 20t \text{ (S.I.)}$$

και για το δεύτερο σώμα που ξεκινά από το σημείο Β με τετμημένη $x_B = d = 120$ m

$$x_B = x_{0,B} - \upsilon_B t \Rightarrow x_B = 120 - 10t \text{ (S.I.)}$$

Για το σημείο συνάντησα ισχύει η σχέση $x_A = x_B \Rightarrow 20t_2 = 120 - 10t_2 \Rightarrow 30t_2 = 120 \Rightarrow \mathbf{t_2 = 4s}$

Επειδή $t_2 < t_1$ τα σώματα προλαβαίνουν να συναντηθούν πριν φτάσουν στο έδαφος.

β. Η συντεταγμένες του σημείου συνάντησης είναι $y_A = 5t_2^2 \Rightarrow y_A = 5 \cdot 4^2 \text{m} \Rightarrow \mathbf{y_A = 80m}$

και $x_A = 20t_2 \Rightarrow$ **x_A = 80 m**.

Άρα η συνάντηση θα γίνει στο σημείο **Γ(80 m, 80 m)**.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Βασίλης Δουκατζής